ζ 関数の特殊値について

片山　喜美

1　はじめに

フェルマーの大定理（あるいは最終定理と呼ばれることもある）がWilesによって解決された．残る未解決問題で最大のものはRiemann予想ということになるだろう．これは「Riemannのzeta関数$\zeta(s)$の自明でない零点はすべて$Re(s)=\frac{1}{2}$のものであろう」という予想である．もともとはRiemannによる素数定理の証明プランの過程に含まれていたものと言われている．しかし、思わぬ困難のためこの証明プランは遂行されなかった.（素数定理は別の方法で他の人が証明した.）以後，約150年未解決問題として君臨しており，数学を学ぶ者の中でRieman予想を知らない者はいない.（フェルマーの大定理は小学生にも理解可能な表現であるのに対してRiemann予想の方は専門的になり，一般の人には余り有名ではない）フェルマーの大定理が代数的整数論を大いに発展させたのと同様にRiemann予想は解析的整数論に多大な貢献をしたようである.（文献[1]）

フェルマーの大定理の解決にもある種のzeta関数が使われているように，数論のなかでzeta関数の持つ重要性はきわめて大きい．その深みを解説するようなことは不可能である．しかし，その一端は身近な所まで舞い降りてきている．ここでは素朴な、高校生にも理解可能な性質について少し述べてみたい.（ただし、記号や数式の証明には高校の数学をはみ出したものも用いている.）

2　２つの無限級数の収束・発散について

高校では無限級数の収束・発散について学ぶ．次の２つの級数については教科書でも必ず取り上げている．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

2.1　級数　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$　(1) について

・級数(1)は$+\infty$に発散する．

証明）

部分和を$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$とおき，$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$を示せばよい．

$n=2^m$のとき

$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m})>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+m*\frac{1}{2}$

$\lim_{m\to\infty}(1+\dfrac{m}{2})=+\infty$.　　従って　$\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{2^m}=+\infty$
また明らかに S_nは単調増加である．よって一般の n について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$ （証明終）

・しかし、級数 (1) はなかなか発散しない．

上で示したように，級数(1) は発散するのであるが，実際に$\dfrac{1}{n}$を順に加える操作をしていく限りは発散するような気がしない．nが大きくなるにつれて加える$\dfrac{1}{n}$がどんどん小さくなるからである．ためしに，手元のコンピュータと UBASIC で計算させてみたところ，部分和S_nが 21 を越えるまでに約９時間を要した.（$n=740,461,601$）たとえ現在世界で最速のスーパーコンピュータを用いて１５０億年ひたすら足し続けても和は１００を越えないであろう。(次に示すように，S_nは $\log n$ とほぼ等しい．１秒間に何回加算できるかを知ればどのくらいの値になるか試算できる.）

・ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ **は収束する．**（この極限値をγで表し，**Euler の定数**と呼ぶ.）
証明）

$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ とおく.

kを正の整数とするとき，$k<x<k+1$ ならば$\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$

従って，$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k} dx$

$$\frac{1}{k+1}<\log(k+1)-\log n<\frac{1}{k} \qquad \cdots\ (a)$$

(a) を $k=1,2,\cdots n$ について足して

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\log(k+1)-\log k)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$　　よって $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$

さらに $\log(n+1)>\log n$ より $a_n>0$ である.

また，$a_n-a_{n+1}=\log(n+1)-\log n-\dfrac{1}{n+1}$であるが，(a) より $\displaystyle\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$．従って，$\dfrac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n$．よって，$a_n>a_{n+1}$.

単調減少である正項数列は収束するから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$が存在する.（証明終）

Euler の定数は$\gamma=0.57721566490153286060\cdots$であることが知られているが、それが無理数であるかどうかについては未解決である.（どうみても有理数とは思えないが）．その計算方法等については文献［６］を参照.

Euler の定数γはΓ関数の無限積展開に用いられる．すなわち，

$\displaystyle\frac{1}{\Gamma(s)}=se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n}$ （Weierstrass の無限積表示）

2.2　級数　$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots$　(2) について

・級数 (2) は収束する．

証明）

$k>1$ のとき $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k-1}$ より

$S_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1+(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})=2-\dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n})=2$　従って、$S_n>0$ は単調増加で有界であるから極限値を持つ.（証明終）

上記のように級数(2) の収束についての証明は高校生にも簡単に分かり 2 より小である．実は級数(2) の極限値は $\dfrac{\pi^2}{6}$ である．この値を発見したのは Euler である．ただし、Euler の時代には無限級数の収束・発散についての理論が整備されていなかったので，現在では許されない計算も行っているようである．彼は発散する級数を巧みに使い，鋭い勘によって計算の危険な部分をうまく避けて通って正しい結果にたどり着いた．片目の巨人(Euler) は真理を見逃さずに捕らえたのである．現在では,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}$$

$\cdots\cdots$

と，指数の部分が偶数のものはすべてその値を計算することができる．さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=$（有理数）$*\pi^{2m}$ であることも知られている．通常は Bernouille 数を用いてその計算をするのであるが，次節では zeta 関数を直接扱った計算により $\displaystyle\zeta(2m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$ のなす漸化式を導く.

ところで，Riemann の zeta 関数をまだ定義していなかった.

2.3　Riemann zeta 関数の定義

$s=\sigma+it\in\mathbf{C}(\sigma,t\in\mathbf{R})$　に対して，$\displaystyle\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$　を考える．この級数は $\sigma>1$ のとき，広義一様収束し，s の解析関数を与える．これを Riemann の zeta 関数という.

さらに，$\zeta(s)$ は全複素平面に解析接続されて，$s=1$ で 1 位の極（留数 1 ）を持つ以外は正則である．また，次のような対称性を持つ.

関数等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

（ただし，$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ ：ガンマ関数 とする.）

Riemann 予想は上の関数等式の対称軸$\sigma=\frac{1}{2}$に自明でない零点が集中していることを主張したものである．対称軸の上にあるということからさもありなんという気がする．計算により，自明でない零点のうち小さい方から 150,000,000 個は$\sigma=\frac{1}{2}$の上にあることが知られているそうである.（文献［２］）これだけ多くのものが正しくても「全て」ということからはほど遠い．級数(1) の場合とちょうど逆である．

3 多重対数関数と$\zeta(2n)$の evaluation

以下の方法は，青本和彦教授（名古屋大学）による「$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$の簡単な証明」と同様な方法で$\zeta(2n)$ $n=2,3,\cdots$の計算ができるか？という問題に対して，私が学生時代に考えたものである.（私の当時の専門はこのような分野ではない．指導教官の喜多通武先生の授業のなかで$\zeta(3)$の無理性の証明（文献［３］）をレポートした後，青本先生からこんなプリントが来たからついでに考えてみなさいと言われてやったことである.）一部の証明については，概略を述べるのみとする．

3.1 多重対数関数

定義

$s\in\mathbf{C},|z|<1$について，$L_s(z)=z+\frac{z^2}{2^s}+\frac{z^3}{3^s}+\cdots+\frac{z^n}{n^s}+\cdots$
と定義する．$L_s(z)$は広義一様絶対収束してs,zについての正則関数となる．

命題

$L_s(z)$は$s\in\mathbf{C},z\in\mathbf{C}\setminus[1,\infty)$で正則な関数に解析接続される．

証明)

$Re(s)>0,|z|<1$のとき，$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ より，

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt=n^{-s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt=n^{-s}\Gamma(s)$$

従って，$$\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^s}\cdot\Gamma(s)=\sum_{n=1}^\infty z^n\int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt=\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{n=1}^\infty z^ne^{-nt}dt=\int_0^\infty t^{s-1}\frac{ze^{-t}}{1-ze^{-t}}dt$$

$$L_s(z)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{z}{e^t-z}dt$$

上式の右辺は$Re(s)>0,z\in\mathbf{C}\setminus[1,\infty)$で正則な関数を定める． 定義より，$L_{s-1}(z)=z\cdot\frac{\partial L_s(z)}{\partial z}$で，上記のことよりこの式の右辺は$Re(s)>0$において正則．従って左辺の$L_{s-1}(z)$もそうである．すなわち$L_s(z)$は$Re(s)>-1$で正則．以下繰り返して$L_s(z)$は$s\in\mathbf{C}$で正則であることが示される.（証明終）

$L_s(z)$ を多重対数関数 (Polylogarithm) という．

命題

$n \in \mathrm{Z}$ について

$$\zeta(n) = L_n(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{\log^{n-1}(1-x)}{x} dx$$

ただし，積分区間の両端については $\displaystyle \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^{1-\delta}$ とする．

証明）

$$L_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 - ye^{-t}} t^{n-1} dt \quad (0 < y < 1)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_{1-y}^1 \frac{\log^{n-1}(\frac{1-x}{y})}{xy} dt$$

ここで $y \to 1-0$ として，

$$\zeta(n) = L_n(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{\log^{n-1}(1-x)}{x} dx$$ （証明終）

3.2 $\zeta(2n)$ の evaluation

前節の結果より、$\zeta(2n) = \dfrac{1}{\Gamma(2n)} \displaystyle\int_0^1 \frac{\log^{2n-1}(1-x)}{x}$

被積分関数を複素関数にして、ある経路で積分計算し、留数定理により上の積分値を求める．初等関数論における常道である．結果として次の漸化式を得る．

定理

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k-1)!} (\pi i)^{2n-2k} \Gamma(2k) \zeta(2k) + \frac{n}{2n+1} (\pi i)^{2n} = 0$$

証明）方針のみ述べる．

関数 $f(z) = \dfrac{\log^{2n-1}(1-z)}{z}$ を図のような積分路 Γ で積分する．

ただし，$\log$ については、$z \in \mathbf{R}, \quad 1 < z$ のときに実数値をとるような branch で考える．

$f(z)$ は Γ で囲まれた領域で一価正則であるから，$\displaystyle \int_\Gamma f(z) dz = 0$

一方、各部分については、変数変換や極となる $z = 0, 1$ の周りの経路では留数定理を用い，最後に $M \to +\infty, \delta \to 0$ とする．

定理の式の形を $\zeta(2n)$ について解いたものにすると，

$$\zeta(2n) = -\frac{n}{(2n+1)!}(-\pi^2)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\pi^2)^{n-k}}{(2n-2k+1)!} \zeta(2k) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

さらに，$\zeta(2n) = a_n \pi^{2n}$ とすると，

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!a_k} \quad ただし，a_1 = \frac{1}{6}$$

これを用いて$\zeta(2n)$の値を下から順に計算していくことができる．Ubasicを用いた簡単なプログラムをあげると．

```
10   'Evaluating the values of zeta(2n)
20   print=print+"zeta(2n).dat"
30   input "How great n do you want to get for zeta(2n)";L
40   dim A(L):A(1)=1//6
50   for N=2 to L
60       A(N)+((-1)^(n-1)*n)//!(2*N+1)
70       for K=1 to N-1
80         A(N)=A(N)-(((-1)^(N-K)//!(2*N-2*k+1))*A(K)
90       next K
100   next N
110   for I=1 to L
120     lprint A(I)
130   next I
```

計算結果の一例を挙げると，前記した$\zeta(6)$から先は

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{993555}, \quad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}, \cdots$$

となる．

4 おわりに

$\zeta(2n)$は（有理数）π^{2n}であるから，$\zeta(2n+1)$は（有理数）π^{2n+1}かと思えばそうではないようである．それどころか，一般に無理数であるかどうかも未だに未解決である．わずかに，$\zeta(3)$が無理数であることがようやく1978年に風変わりな数学者Roger Aperyによって証明されたのみである．（私が学生の時は「フランスの田舎の爺さんが解いた」と聞かされた．）Eulerの時代からいろいろと研究されていたにも関わらず，しかも，他の数論の問題のように「現代数学の強力な道具を使って」ではなく「普通に」解かれてしまったことは驚きであった．当時の報告（文献［4］）はAperyの証明を「Eulerが見逃した証明…」と題している．（Aperyについて，は文献[5]参照．）残念ながら，Aperyの方法は$\zeta(5)$およびそれ以上の奇数の場合に適用することはできない．謎の解決には新たで強力な数学の方法を待たなければならないのか，もしくは，まだ「見逃された」証明方法があるのだろうか．大問題であるRiemann予想も含め，誰が，どのような方法で解決していくのであろうか．

文献

［1］鹿野　健,「リーマン予想」，日本評論社

［2］Zagier,　「数論入門」，岩波書店

［3］F.Beukers,「A note on the irrationality of $\zeta(2)\, and\, \zeta(3)$」，Bull. London Math. Soc. 11(1979)

［4］A.van der Poorten,「A Proof that Euler missed... Apery's proof of the ir-

rationality　$\zeta(3)$」,Math.　Intelligencer,1(1979)
［５］志賀　弘典,「伝説の数学者　ロジェ・アペリの軌跡」, 数学セミナー　1995年9月号
［６］森本　光生,「UBASICによる解析入門」, 日本評論社