$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots=\infty$ について

2023年第1学期授業補足

$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$　(問題集グローバル　問223) により、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\infty$$

が導かれる.

一方、問題集グローバル　問228の方法で、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10^n}\frac{1}{k}<\frac{3}{2}+\int_2^{10^n}\frac{dx}{x}$ が成り立つことがわかる。従って、$\displaystyle\sum_{k=1}^{10^n}\frac{1}{k}<\frac{3}{2}+n\log 10$ が成り立つ。(−log2 を無視した)

$\log 2=0.693,\ \log 5=1.609$ を用いると、$\displaystyle\sum_{k=1}^{10^n}\frac{1}{k}<\frac{3}{2}+n(0.693+1.609)=1.5+2.302n$

では、スーパーコンピュータ「富岳」で $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ を100億年計算すると、その和はどのくらい大きくなるだろうか？

・富岳は毎秒41.6京回計算できるとのことである。41.6×10^{16} 回。

・100億年 $=100\times10^8\times(60\times60\times24\times365.25)\fallingdotseq3.15\times10^{17}$ 秒

よって、100億年間で計算する回数は、$(41.6\times10^{16})\times(3.16\times10^{17})\fallingdotseq1.31\times10^{35}$ 回となる。

粗く見積もって、計算回数は 10^{36} 回よりも少ない。

従って、富岳が100億年かかって足した結果 $<1.5+2.302\times36=84.372$

すなわち、85に満たない。

実験科学的には、$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ が無限大になるとは、到底思えない。