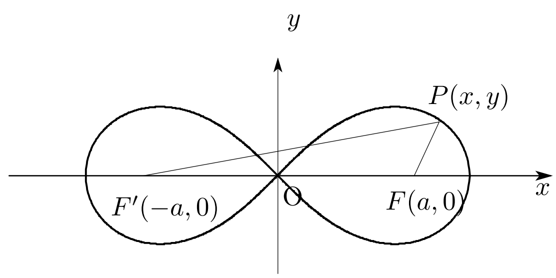
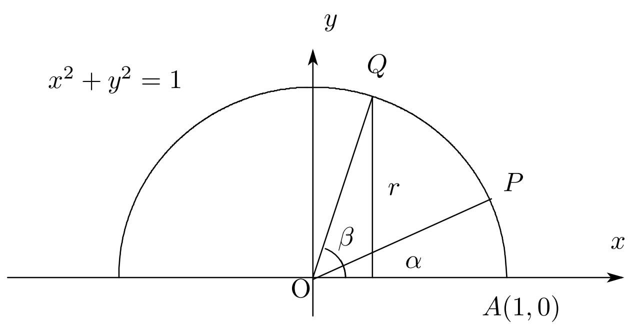
数学　，Cとその周辺
についてのメモ

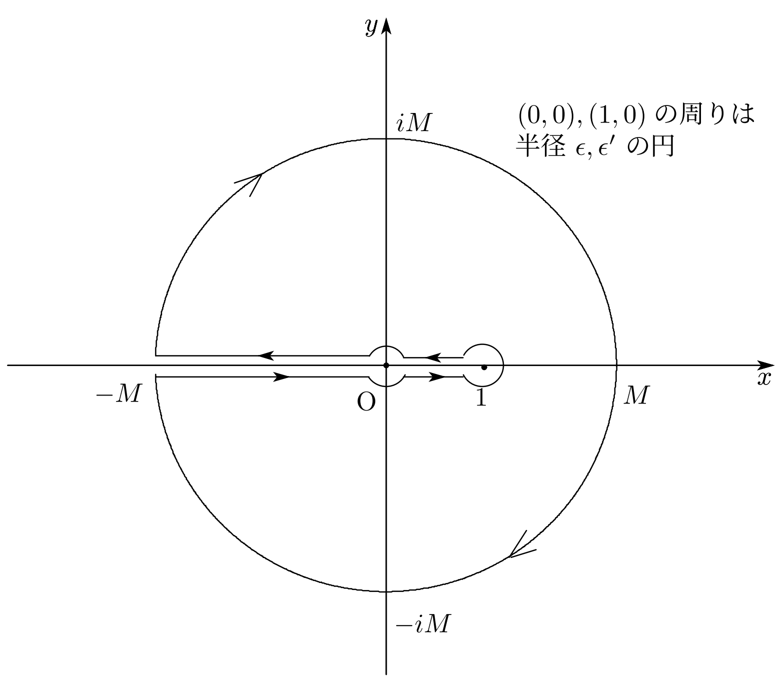


富山県立砺波高等学校

片山　喜美

目 次


y
Q
$x^2 + y^2 = 1$
r
P
β
x
α
O
$A(1,0)$


y
iM
$(0,0),(1,0)$ の周りは
半径 ϵ, ϵ' の円
$-M$
O
1
M
x
$-iM$

はじめに

今回発表することに決まったのは，5 月中旬頃だったと思う. 発表には，授業に即した内容がふさわしいのであろうが、これまでの実践に乏しく、準備期間もあまりかった.（予定では，砺波高校に発表が回ってこないと信じていた.) さらに今年度は 3 年生の担任をしていることもあり，特別な試みをすることは不可能であった．従って，手元にメモしておいたものから数学　，C に関連していると考えられるものと，昨年度の課題研究で生じた問題の解決についてのレポートをまとめることにした．殴り書きにしてあるものをいつかは整理しようと思っていたので，この機会にそれを実行させてもらった.

いろいろ他にやらなければいけないことが多く，結局打ちこみ始めたは 8 月中旬になってからであった．その後も時間があまりなく，不備なところがたくさんあるものと思う.

第 1 章は馴染み深い 2 つの数 ⋯ 自然対数の底 e と円周率 π について，それらが無理数であること，さらには超越数であることの証明をまとめた．身近な本には扱われていない内容かと思っていたのであるが，最近の「大学への数学」でも少し取り上げられたりしており，書かれている本を私が知らないだけのことかもしれない.

第 2 章では，数学　の教科書でも目にする級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ に関する話題から少しまとめた.

第 3 章では，三角関数の加法定理を曲線の長さを求める積分の面から眺めたものをとりあげた．さらに，レムニスケートを定義し，その弧長についても三角関数からの類推により加法定理が成り立つこと紹介した.

第 4 章では，昨年度の課題研究の中で生徒が見つけた漸化式と，それが正しいことを 2 次形式によって証明したことについてまとめた.

メモをまとめてみて，もう少し掘り下げてみればいいなと思うことがいくつかあった．時間を見つけて取り組んでみたいものだが，数学以外の仕事にも多大な時間を取られることなどから，思うようにはいかない.（もちろん自分の能力にも問題があるのだが）

今回の原稿は主に秀丸 Editor と TexMac を用いて打ちこみ，pLaTeX2ε で処理した．途中，WinTpic95 という，グラフを作成し TeX に張りこむのに便利なフリーウェアを知り，いくつかの図を挿入するのに用いた．また，LabEditor という TeX の文章を作成するのに便利な Editor や emath.sty というマクロ集があることも知った．これらのソフトや pLaTeX2ε の使い方にはまだ十分には習熟していないが，数学そのもの以外にも得るものがあったと思う.

なお，砺波高校数学科の先生方には，日頃からの助言，原稿の校正など大変お世話になったことを感謝します.

富山県立砺波高等学校
教諭　片 山 喜 美
E ー mail　ja9nfo@p1.coralnet.or.jp
もしくは GGC01060@niftyserve.ne.jp

第1章　自然対数の底 e と円周率 π

高校までに学ぶ数のうち，円周率 π，自然対数の底 e は超越数であることが知られている．すなわち，整数を係数とする x の多項式の根[1]とはなり得ない．e が無理数であることの証明は案外簡単で，高校生にもわかる範囲でできる．また，超越数であることの証明についても理解できる範囲のものであろう．大学に進学した生徒[2]からの質問で目にした演習問題[3]が，段階的に $e^{\frac{n}{m}}$ が無理数であることを導くものであった．久しぶりに問題を解いてみたことを機会に，学生時代に学んだことを振り返ってみた．

なお，e の連分数展開は特徴的なものであるが，どうしてそうなるのかはまだ調べていない．[4]

1.1　無理数であることについて

1.1.1　e が無理数であること

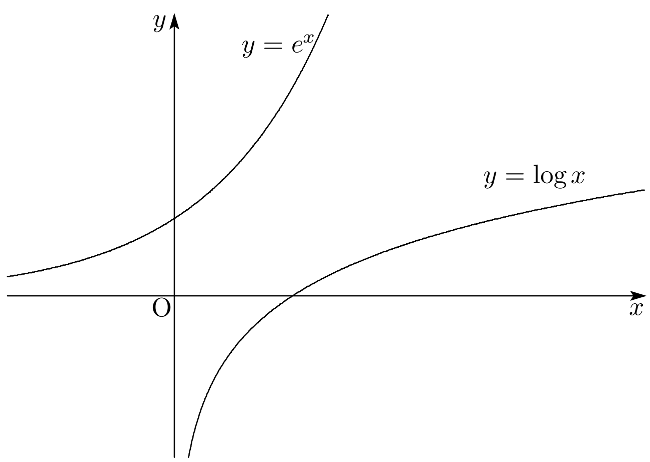


図 1.1:

e については幾つかの定義があるだろう．例えば，

(1) $e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$

[1]高校では「方程式の根」という表現が正しく,「多項式の根」という表現はよくないとする傾向があるが,「多項式の根で意味するものは分かるであろう．

[2]この学生は現在大学３年生であるが，この夏遊びに来たときには数学にはもう随分苦労して，大変そうであった．数学科に進学を勧めたことがよかったのかどうか...

[3]名古屋大学で１年生向けに出されたもの．Hardy & Wright "An Introduction to the Theory of Numbers" (Oxford Univ. Press) に従ったものである．

[4]Hurwitz "Ubër die Kettenbruch-Entwicklung der Zahl e"　参照．

(2) 指数関数 $y = a^x$ のうち，$x = 0$ の点における接線の傾きが 1 となるものの底を e とする．

(3) $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(4) 微分方程式 $\dfrac{df}{dx}(x) = f(x),\ f(0) = 1$ の解の $x = 1$ のときの値を e とする．

などがあげられる．

いずれも，同値な定義になるはずである．手元の教科書では (1) の定義を採用している．以前は (2) の定義であったように思うが，この定義ではそのような底の存在が曖昧であるから避けたのだろうか？(3) の定義からは指数関数・対数関数を定義していくのが大変そうであり，むしろ他の定義からの帰結として扱うのがよいのであろう．(4) の定義が一番もっともらしいものであると学生のころに聞いた覚えがある．

いずれにせよここでは

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

が成立しているものとする．

定理 1.1　e は無理数である．

$e - 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$　が無理数であることを背理法で示す．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{l}{k}$ $(k, l \in \mathbb{N},$ 互いに素 $)$ だったと仮定する．

このとき，

$$N := k!\left(e - 1 - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!}\right)$$

とおく．

$$N = k! \cdot \left(\frac{l}{k} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\right) = l \cdot (k-1)! - k!\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}$$

$$\therefore N \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

一方，

$$\frac{l}{k} - \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k+l)!} + \cdots\cdots$$

であるから,

$$N = k!\left\{\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k+l)!} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots\cdots \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+l)} + \cdots\cdots$$

$$< \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k+1)^l} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{k+1}\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k+1}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{k}$$

すなわち,

$$0 < N < \frac{1}{k} \tag{1.2}$$

(1.1) と (1.2) は矛盾である．従って，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \notin \mathbb{Q}$

$$\therefore e \notin \mathbb{Q} \quad //$$

これで，e が無理数であることが証明できた.

1.1.2 e^q $(q \in \mathbb{Q})$ が無理数であること

以下では，$e^{\frac{n}{m}}$ $(m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0)$ について考える.

補題 1.1 $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ について，$f^{(m)}(0), f^{(m)}(1)$ は常に整数である.

証明）二項定理より,

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k x^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ {}_nC_k x^{n+k}$$

従って,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ {}_nC_k\frac{d^m}{dx^m}x^{n+k}$$

ここで,

$$\frac{d^m}{dx^m}x^{n+k} = \begin{cases} (n+k)(n+k-1)\times\cdots\times(n+k-m+1)x^{n+k-m} & \\ & (n+k \geq m \text{ のとき}) \\ 0 & (n+k < m \text{ のとき}) \end{cases}$$

1. $0 \leq m < n$ のとき, x^{n+k-m} の指数は $k = 0, 1, \cdots, m$ について常に正.

$$\therefore f^{(m)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \ {}_nC_k(n+k)(n+k-1)\times\cdots\times(n+k-m+1)x^{n+k-m}$$

$$\therefore f^{(m)}(0) = 0$$

2. $n \leq m \leq 2n$ のとき,

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=m-n}^{m}(-1)^k \ {}_nC_k(n+k)(n+k-1)\cdot\cdots\cdot(n+k-m+1)x^{n+k-m+1}$$

$x = 0$ を代入して残るのは x^0 のときのみ. すなわち $k = m-n$ のとき

$$\therefore f^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}(-1)^{m-n} \ {}_nC_{m-n}\cdot m! = \frac{m!}{n!}(-1)^{m-n} \ {}_nC_{m-n}$$

$n \leq m$ より $\dfrac{m!}{n!} = m(m-1)\cdot\cdots\cdot(n+1) \in \mathbb{Z}$

また, ${}_nC_{m-n} \in \mathbb{Z} \qquad \therefore f^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$

$f^{(m)}(1)$ については, $t = 1-x$ とおくと,

$$f(x) = f(1-t) = \frac{(1-t)^n t^n}{n!} = f(t)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}f(x) = \frac{d^m}{dt^m}f(t)\cdot(-1)^m = (-1)^m f^{(m)}(t)$$

$x = 1$ を代入 $(t = 0)$

$$f^{(m)}(1) = (-1)^m f^{(m)}(0) \qquad \therefore f^{(m)}(1) \in \mathbb{Z} \qquad //$$

補題 1.2 $h \in \mathbb{N}$ について

$$F(x) = h^{2n}f(x) - h^{2n-1}f'(x) + h^{2n-2}f''(x) - \cdots\cdots - hf^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x)$$

とおくとき,

$$\frac{d}{dx}\{e^{hx}F(x)\} = h^{2n+1}e^{hx}f(x)$$

証明）

$$\frac{d}{dx}\{e^{hx}F(x)\} = he^{hx}F(x) + e^{hx}F'(x) = e^{hx}\{hF(x) + F'(x)\} \tag{1.3}$$

$$hF(x) + F'(x)$$

$$= h^{2n+1}f(x) - h^{2n}f'(x) + \cdots\cdots - h^2 f^{(2n-1)}(x) + hf^{(2n)}(x)$$

$$+h^{2n}f'(x) - h^{2n-1}f''(x) + \cdots\cdots - hf^{(2n)}(x) + 0$$

（最終項については，$f(x)$ が $2n$ 次の多項式であることより，$f^{(2n+1)}(x) = 0$ となる.）

$$= h^{2n+1}f(x)$$

これを (1.3) に代入して，与式成立//

補題 1.3　$0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$

証明）$0 < x < 1$, $0 < 1 - x < 1$ より明らか. //

定理 1.2　$e^h \notin \mathbb{Q} \quad (h \in \mathbb{N})$

証明）$e^h = \dfrac{a}{b} \qquad (a, b \in \mathbb{N},\, a \neq 0,\, a, b$ は互いに素)　と仮定して矛盾を導く.

$$\alpha := b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f(x)dx$$

とおく．補題 1.2 より

$$\alpha = b\int_0^1 \{e^{hx}F(x)\}'dx = b\Big[e^{hx}F(x)\Big]_0^1 = b\{e^hF(1) - f(0)\}$$

ここで,

$$be^hF(1) = b\cdot\frac{a}{b}\left\{h^{2n}f(1) - h^{2n-1}f'(1) + \cdots\cdots - hf^{(2n-1)}(1) + f^{(2n)}(1)\right\}$$

$$= a\left\{h^{2n}f(1) - h^{2n-1}f'(1) + \cdots\cdots - hf^{(2n-1)}(1) + f^{(2n)}(1)\right\} \in \mathbb{Z}$$

($\because$ 補題 1.1 より $f(1), f'(1), \cdots\cdots, f^{(2n)}(1) \in \mathbb{Z}$)
同様に $bF(0) \in \mathbb{Z}$ も成立する.

$$\therefore \alpha \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

一方，補題 1.3 より

$$0 < b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f(x)dx < b\int_0^1 h^{2n+1}e^h \cdot \frac{1}{n!}dx = \frac{bh^{2n+1}e^h}{n!}$$

ここで， n は任意に選べるので，十分大きな n を選べば

$$\frac{bh^{2n+1}e^h}{n!} < 1 \tag{1.5}$$

とできる．(1.4) と (1.5) は矛盾．従って， $e^h \notin \mathbb{Q}$//

定理 1.3 $e^q \quad (q \in \mathbb{Q})$ は無理数である。

証明）$l, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, m, n は互いに素のとき，もし， $e^{\frac{l}{m}} \in \mathbb{Q}$ とすると，$(e^{\frac{l}{m}})^m = e^l \in \mathbb{Q}$ となり，これは上の定理に矛盾する．従って，$e^{\frac{l}{m}} \notin \mathbb{Q}$
また，$e^{\frac{l}{m}}$ の逆数も考えると定理が成立することが言える．//

1.1.3　π が無理数であること

定理 1.4 $\pi \notin \mathbb{Q}$

$\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ を示す.
もし，$\pi^2 = \dfrac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{N}$, a, b は互いに素$)$ であると仮定すると，

$$\beta = \pi\int_0^1 a^n f(x)\sin\pi x\ dx$$

について，$0 < x < 1$ のとき，$0 < \sin\pi x \leq 1, \quad 0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$ であることより，

$$0 < a^n f(x)\sin\pi x < \frac{a^n}{n!}$$

ここで， $n > a$ とすると，

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{a^a}{a!}\Big(\frac{a}{a+1}\Big)^{n-a} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$

ゆえに， n を十分大きくとると　$0 < \dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{\pi}$ とすることができる．このとき，

$$0 < \pi\int_0^1 a^n f(x)\sin\pi x dx < \pi\int_0^1 \frac{dx}{\pi}$$

$$0 < \beta < 1 \tag{1.6}$$

次に,

$$G(x) = b^n\{\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f''(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x) - \cdots\cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\}$$

とおく.

$$G(0) = b^n\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n f(0) - \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} f''(0) + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} f^{(4)}(0) - \cdots\cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0)\right\}$$

$$= a^n f(0) - a^{n-1}f''(0) + a^{n-2}f^{(4)}(0) - \cdots\cdots + (-1)^n b^n f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$$

同様に, $G(1) \in \mathbb{Z}$ も示される.

$$\frac{d}{dx}\{G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\}$$

$$= G''(x)\sin\pi x + \pi G'(x)\cos\pi x - \pi G'(x)\cos\pi x + \pi^2 G(x)\sin\pi x$$

$$= \{G''(x) + \pi^2 G(x)\}\sin\pi x$$

$$G''(x) + \pi^2 G(x)$$

$$= b^n\Big\{\pi^{2n}f''(x) - \pi^{2n-2}f^{(4)}(x) + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n)}(x) + 0$$

$$+\pi^{2n+2}f(x) - \pi^{2n}f''(x) + \cdots\cdots + (-1)^n\pi^2 f^{(2n)}(x)\Big\}$$

$$= b^n\pi^{2n+2}f(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\} = \pi^{2n+2}b^n f(x)\sin\pi x = \pi^2 a^n f(x)\sin\pi x$$

$$\beta = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{d}{dx}\{G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\Big]_0^1$$

$$= G(1) + G(0) \in \mathbb{Z} \tag{1.7}$$

(1.6) と (1.7) は矛盾. 従って, $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$
ゆえに　$\pi \notin \mathbb{Q}$　//

1.2　e と π の超越性

以下の内容は，大学３年のときの演習で扱われたものである。[5]

定義 1.1 実数 a が代数的であるとは

$$^{\exists}f(x) \in \mathbb{Z}[x] \quad s.t. \quad f(a) = 0$$

ただし，$f(x) \not\equiv 0$ とする．
代数的数でない数を超越数と言う．

1.2.1　e の超越性

定理 1.5 e は超越数である．

証明）背理法による．e が代数的数であると仮定する．このとき，

$$\exists q_0 \neq 0, q_1, \cdots\cdots, q_n \in \mathbb{Z} \quad s.t.$$

$$q_0 + q_1 e + q_2 e^2 + \cdots\cdots + q_n e^n = 0 \tag{1.8}$$

(1.8) を利用できるように，次の定積分を考える．

$$I(t) := \int_0^t e^{t-x} f(x) dx \tag{1.9}$$

ただし，$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots\cdots (x-n)^p \qquad p$ は素数とする．
$m = np + p - 1$ とおくと，m は $f(x)$ の次数であり，

$$I(t) = e^t \int_0^t e^{-x} f(x) dx$$

$$= e^t \Big[-e^{-x} f(x) \Big]_0^t + e^t \int_0^t e^{-x} f'(x) dx$$

$$= \Big\{ -f(t) + e^t f(0) \Big\} + e^t \Big[-e^{-x} f'(x) \Big]_0^t + e^t \int_0^t e^{-x} f''(x) dx$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \{-f(t) + e^t f(0)\} + \{-f'(0) + e^t f'(0)\} + \cdots\cdots$$

$$+ \{-f^{(j)}(t) + e^t f^{(j)}(0)\} + \cdots\cdots + \{-f^{(m)}(t) + e^t f^{(m)}(0)\}$$

[5] 村瀬元彦先生の演習．楕円関数，佐藤超関数などの話題もあった．

$$= e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \tag{1.10}$$

$$(\because f^{(m+1)}(x) = 0)$$

(1.8) を使いたいので,

$$J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \cdots\cdots + q_n I(n)$$

を考える．(1.8),(1.10) より,

$$J = \sum_{k=0}^{n} q_k I(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(q_k e^k \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) \right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} q_k e^k \right) \left(\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} q_k f^{(j)}(k)$$

$$= - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k) \tag{1.11}$$

$f^{(j)} \in \mathbb{Z} \qquad (j = 0, 1, \cdots, m, \quad k = 0, 1, \cdots, n) \qquad$ は $f^{(j)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ より明らかであるが，さらに,

$$\begin{cases} j < p \text{ かつ } k = 1, 2, \cdots, n & \Longrightarrow \quad f^{(j)}(k) = 0 \\ j < p - 1 & \Longrightarrow \quad f^{(j)}(0) = 0 \\ j \geq p & \Longrightarrow \quad p! \mid f^{(j)}(k) \qquad (\because f^{(j)}(x) \text{ の係数はすべて } p! \text{で割り切れる.}) \end{cases}$$

$j = p - 1$ かつ $k = 0$ のときが問題となる．$f(x)$ の x^{p-1} の項の係数は $(-1)^p(-2)^p \cdots (-n)^p = (-1)^{np}(n!)^p$ である．従って,

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p(p-1)!$$

p を n および $|q_0|$ より大きな素数とする．
$J = -q_0 f^{(p-1)}(0) \quad + \quad (P! \text{ で割り切れる項})$
$-q_0 f^{(p-1)}(0)$ は $(p-1)!$ で割り切れるが，$p!$ では割り切れない．従って,

$$J = (p-1)! \times N \qquad\qquad N \not\equiv 0 \pmod{p}$$

$$|J| = (p-1)! \times |N|$$

$$|J| \geq (p-1)! \tag{1.12}$$

次に，$g(x) = x^{p-1}(x+1)^p(x+2)^2 \cdots\cdots (x+n)^p$ とおく．
$0 \leq x \leq n$ のとき，$|f(x)| \leq g(k)$
また，$|I(k)| \leq e^k \int_0^k e^{-x}|f(x)|dx \leq e^k k g(k)$
$k \leq n$ より，$g(k) \leq g(n)$ $\quad$ $|I(k)| \leq ne^n g(n) \leq ne^n \left\{(2n)^{n+1}\right\}^p$
従って，

$$|J| \leq |q_1||I(1)| + |q_2||I(2)| + \cdots\cdots + |q_n||I(n)| < \sum_{k=1}^{n} |q_k| n \cdot e^n \left\{(2n)^{n+1}\right\}^p < C^p \tag{1.13}$$

ただし，C は $n, q_0, \cdots, q_n$ によってのみ定まる正の定数で，p には無関係である．(1.12),(1.13) により，

$$(p-1)! \leq |J| \leq C^p$$

しかし，$\lim_{p\to\infty} \frac{C^p}{(p-1)!} = 0 \quad for \quad {}^\forall C > 0$ であることより，これは矛盾．
以上より，自然対数の底 e は超越数である．//

1.2.2 π の超越性

π が代数的であると仮定する．$i = \sqrt{-1}$ は $z^2 + 1 = 0$ の解であるから，$\mathbb{Q}$ 上代数的である．従って，$\theta = \pi i$ とおくとき，θ も代数的である．
$\therefore \quad {}^\exists g(z) \in \mathbb{Z}[z]$，既約，$g(z)$ の係数は互いに素 $\quad s.t. \quad g(\theta) = 0$
これを θ の最小多項式という．
$\dim g(z) = d$ とし，z^d の係数 l は（必要ならば $-g(z)$ に取り替えて）正であるとする．
$e^{\pi i} = -1$ であるから，$1 + e^\theta = 0$
$g(z) = 0$ の解を $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_d$ と書けば，

$$0 = \prod_{\mu=1}^{d}(1 + e^{\theta_\mu}) = \sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_d \in \{0,1\}} e^{\epsilon_1\theta_1 + \cdots + \epsilon_d\theta_d} \tag{1.14}$$

$$\epsilon_1\theta_1 + \epsilon_2\theta_2 + \cdots\cdots + \epsilon_d\theta_d \qquad (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots, \epsilon_d \in \{0,1\})$$

は，2^d 個の数を表し得るが，そのうちで 0 と異なるものを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ とする．$q = 2^d - n$ とすると，q 個のものは 0 であるから，

$$0 = q + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots\cdots + e^{\alpha_n} \tag{1.15}$$

この関係式を用いるために次の積分を考える．

$$I(t) = \int_0^t e^{t-x} f(x) dx \tag{1.16}$$

ただし，

$$f(x) = l^{np+p-1} x^{p-1}(x-\alpha_1)^p(x-\alpha_2)^p \cdots\cdots (x-\alpha_n)^p \tag{1.17}$$

とする．$m = np + p - 1$ とおくと，部分積分法より

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \tag{1.18}$$

ここで

$$J = I(\alpha_1) + I(\alpha_2) + \cdots\cdots + I(\alpha_n)$$

とおく．(1.15) より，

$$J = \sum_{k=1}^{n} \left\{ e^{\alpha_k} \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(\alpha_k) \right\} = -q \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k) \tag{1.19}$$

ここで，e の超越性の証明のときと同様に，$f^{(j)}(\alpha_k)$ が $p!$ で割り切れるかどうかを調べたいのであるが，そもそも $f^{(j)}(\alpha_k)$ が整数かどうかもわかっていない．α_k は複素数である．しかし，

- $f^{(j)}(0)$ は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ の対称式である．
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k)$ も $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ の対称式である．
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ の対称式は 2^d 個の数 $\{\epsilon_1\theta_1 + \epsilon_2\theta_2 + \cdots\cdots + \epsilon_n\theta_n \,|\, \epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n = \pm 1\}$ の基本対称式で表すことができる．
- $l\alpha_1, l\alpha_2, \cdots\cdots, l\alpha_n$ の対称式は $l\theta_1, l\theta_2, \cdots\cdots, l\theta_n$ の基本対称式で表される．

ということに注意する．$\theta = \theta_1$ の最小多項式は $g(z) = l(z-\theta_1)(z-\theta_2)\cdots\cdots(z-\theta_d) \in \mathbb{Z}[z]$ であるから，解と係数の関係から，$l\theta_1, l\theta_2, \cdots\cdots, l\theta_n$ の基本対称式は整数である．従って，$f^{(j)}(0)$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k)$ は整数である．さらに，e のときと同様に

$$f^{(j)}(0) \quad (j \neq p-1) \text{ は } p! \text{ で割り切れる．}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k) \text{ は } {}^\forall j \text{ について } p! \text{ で割り切れる．}$$

一方，$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np} l^{p-1}(l\alpha_1 \cdot l\alpha_2 \cdots\cdots l\alpha_n)^p$ も整数である．従って，素数 p を $|q|$ よりも，また，$l^n \cdot |\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n|$ よりも大きくとると，J の中で $f^{(p-1)}(0)$ 以外の項はすべて $p!$ で割り切れるのに，$qf^{(p-1)}(0)$ だけは $(p-1)!$ までしか割り切れない．$\therefore \quad (p-1)! < |J|$
e のときと同様に (1.16),(1.17) を評価すると $|J| < C^p$

$$\therefore \quad (p-1)! < C^p$$

p を大きな素数とすると，これは矛盾．
従って，$\theta = \pi i$ は代数的ではない．これより π が超越数であることが従う．//

1.3 課題：e と π の連分数展開

e や π は特徴的な連分数展開をもつ.

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \cdots\cdots]$$

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 293, \cdots\cdots]$$

さらに, e については

$$\frac{e-1}{e+1} = [0, 2, 6, 10, 14, \cdots, 4n-2, \cdots\cdots]$$

$$\frac{e^2-1}{e^2+1} = [0, 1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\cdots]$$

$$e^2 = [7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, 42, \cdots, 3n-1, 1, 1, 3n, 12n+6, \cdots\cdots]$$

などが知られている. 時間があればどうしてそうなるのか調べてみたい.

第2章　$\zeta(n)$ について

定義 2.1 ζ 関数を以下のように定義する．

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

・$\zeta(s)$ は半平面 $Re(s)>1$ で広義一様収束する．さらに，全平面に解析接続され，$s=1$ に留数 1 の 1 位の極を持つ他は正則である．
$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ の発散は数学　の教科書等でも扱われている．手元の受験問題集でも北海道大学の入試問題として，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geq\frac{n}{2}+1$ を数学的帰納法で証明し，一般項が 0 に収束しても和が $+\infty$ に発散する数列を導出させている．
・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ は収束する．その極限値を Euler の定数 γ という．γ については無理数かどうかなどあまりわかっていない．
・ζ 関数の正の偶数における値 $\zeta(2k)=1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^{2k}}+\cdots\cdots$ は Euler の発見[1]をはじめ $a_k\pi^{2k}\ (a_k\in\mathbb{Q})$ とわかっている．a_k は漸化式により計算することができる．それに比べ，$\zeta(2k+1).\ (k=1,2,3,\cdots\cdots)$ は現在でもあまりよく知られていない．

2.1　多重対数関数と $\zeta(2n)$ の値

以下の内容は，青本和彦先生の「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ の初等的証明」の方法を拡張したものである．

2.1.1　多重対数関数

定義 2.2 $s,z\in\mathbb{C},\ |z|<1$ に対して

$$L_s(z)=z+\frac{z^2}{2^s}+\frac{z^3}{3^s}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n^s}+\cdots$$

と定義する．

[1] Euler は $\zeta(2),\cdots\cdots,\zeta(26)$ の値を計算したとのこと．

命題 2.1 $L_s(z)$ は $s \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ で正則な関数に解析接続される．

証明）定義により，

$$L_{s-1}(z) = z \cdot \frac{\partial L_s(z)}{\partial z} \tag{2.1}$$

が成立する．

$Re(s) > 0,\ |z| < 1$ のとき，$\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt = n^{-s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt = n^{-s}\Gamma(s)$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} \cdot \Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty z^n \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt = \int_0^\infty t^{s-1}\sum_{n=1}^\infty z^n e^{-nt}dt = \int_0^\infty t^{s-1}\frac{ze^{-t}}{1-ze^{-t}}dt$$

したがって，

$$L_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{z}{e^t - z}t^{s-1}dt$$

上式の右辺は $Re(s) > 0,\ z \in \mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ で正則な関数を定める．さらに，(2.1) によりすべての $s \in \mathbb{C}$ に解析接続される．$L_s(z)$ を**多重対数関数**という．

命題 2.2 $n \in \mathbb{Z}$ について

$$\zeta(n) = L_n(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{\log^{n-1}(1-x)}{x}dx$$

証明）$0 < y < 1$ のとき，

$$L_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{ye^{-t}t^{n-1}}{1-ye^{-t}}dt = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_{1-y}^1 \frac{\log^{n-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)}{x}dx$$

$y \to 1-0$ として

$$L_n(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{\log^{n-1}(1-x)}{x}dx \quad //$$

この積分形を用いて $\zeta(2n)$ の値を計算する．

2.1.2 $\zeta(2n)$ の満たす漸化式について

図 2.1 のような積分路 Γ を考える．ただし，

$$\Gamma = [-M,-\epsilon]^- \ \cup\ \delta_0^- \ \cup\ [\epsilon, 1-\epsilon']^- \ \cup\ \delta_1 \ \cup\ [\epsilon, 1-\epsilon']^+ \ \cup\ \delta_0^+ \ \cup\ [-M,-\epsilon]^+ \ \cup\ \delta_M$$

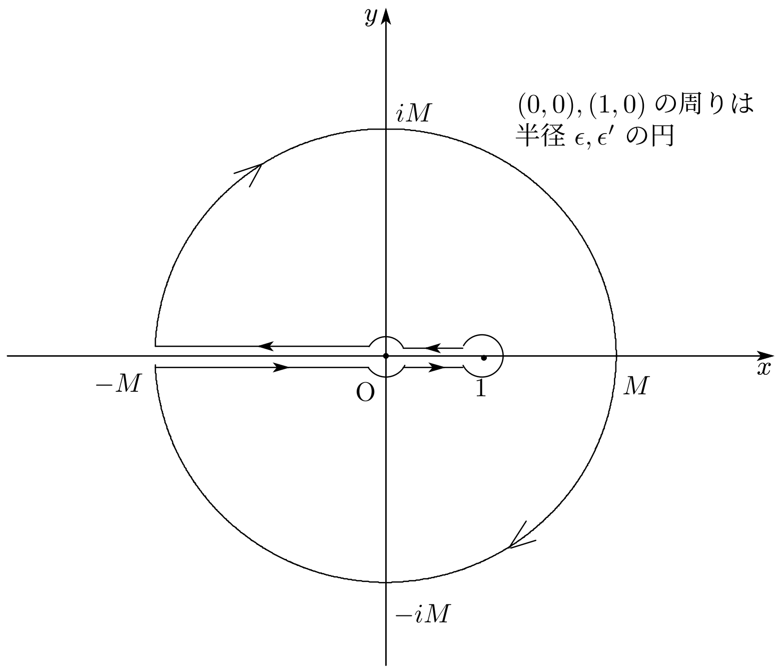


図 2.1: 積分路 Γ

$[a,b]^-$ は a から b へ至る経路（図 2.1 で x 軸の下を正の方向へ進む経路）
$[a,b]^+$ は b から a へ至る経路（図 2.1 で x 軸の上を負の方向へ進む経路）
$\delta_0^- = \left\{z = \epsilon e^{i\theta} \mid -\pi \leq \theta \leq 0\right\}$
$\delta_0^+ = \left\{z = \epsilon e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\right\}$
$\delta_1 = \left\{z = 1 + \epsilon' e^{i\theta} \mid -\pi \leq \theta \leq \pi\right\}$
$\delta_M = \left\{z = M e^{i\theta} \mid \pi \geq \theta \geq -\pi\right\}$（負の方向へ回る）
$\log(z-1)$ は多価関数であるが，$1 < z \in \mathbb{R}$ のとき実数値を取るような branch を選ぶものとする．
このとき，$\dfrac{\log^{2n}(z-1)}{z}$ は Γ で囲まれた領域で一価正則である．従って

$$\int_\Gamma \frac{\log^{2n}(z-1)}{z} dz = 0 \tag{2.2}$$

積分路を分けて計算する．

(I) 経路 $[-M,-\epsilon]^-$ と $[-M,-\epsilon]^+$

$$\int_{[-M,-\epsilon]^-} \frac{\log^{2n}(z-1)}{z} dz + \int_{[-M,-\epsilon]^+} \frac{\log^{2n}(z-1)}{z} dz$$

$$= \int_{-M}^{-\epsilon} \frac{\{\log|x-1| - \pi i\}^{2n} - \{\log|x-1| + \pi i\}^{2n}}{x} dx$$

$$= -2\sum_{k-1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1} (\pi i)^{2n-2k+1} \int_{-M}^{-\epsilon} \frac{\log^{2k-1}|x-1|}{x} dx \tag{2.3}$$

ここで，$x=\dfrac{y}{y-1}$ と変換すると $dx=\dfrac{-dy}{(y-1)^2}$

x	$-M$	$\longrightarrow$	$-\epsilon$
y	$\frac{M}{M+1}$	$\longrightarrow$	$\frac{\epsilon}{\epsilon+1}$

$$\int_{-M}^{-\epsilon}\frac{\log^l|x-1|}{x}dx=\int_{\frac{M}{M+1}}^{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}\frac{\log^l\left|\frac{1}{y-1}\right|}{\frac{y}{y-1}}\frac{-dy}{(y-1)^2}$$

$$=-\int_{\frac{M}{M+1}}^{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}\frac{\log^l\frac{1}{y-1}}{y(y-1)}dy=(-1)^{l+1}\int_{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}^{\frac{M}{M+1}}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)\log^l(1-y)dy$$

$$=(-1)^{l+1}\left\{\int_{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}^{\frac{M}{M+1}}\frac{\log^l(1-y)}{y}dy-\frac{1}{l+1}\left[\log^{l+1}(1-y)\right]_{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}^{\frac{M}{M+1}}\right\}$$

$$\longrightarrow\qquad(-1)^{l+1}\left\{\int_0^1\frac{\log^l(1-y)}{y}dy-\frac{1}{l+1}\log^{l+1}\frac{1}{M+1}\right\}\qquad(\epsilon\to+0,M\to+\infty)\tag{2.4}$$

（注意. $\log^{l+1}\dfrac{1}{M+1}\quad(M\to+\infty)$ は発散項であるが，他の経路から出る発散項と合わせるためにとりあえずこの形で書き留めておく.）

(2.4) を (2.3) に代入して

$$(2.3)=-2\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\left\{\int_0^1\frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx-\frac{1}{2k}\log^{2k}\frac{1}{M+1}\right\}\tag{2.5}$$

(II) 経路　δ_0^- と δ_0^+

$$\int_{\delta_0^-}\frac{\log^{2n}(z-1)}{z}dz$$

$$\int_{\delta_0^-}\frac{\log^{2n}(z-1)-\log^{2n}(-1)}{z}dz+\int_{\delta_0^-}\frac{\log^{2n}(-1)}{z}dz$$

$$\longrightarrow\int_{\delta_0^-}\frac{\log^{2n}(-1)}{z}dz\qquad(\epsilon\to+0)$$

$$=\int_{\delta_0^-}\frac{(-\pi i)^{2n}}{z}dz=(\pi i)^{2n+1}$$

同様に

$$\int_{\delta_0^+}\frac{\log^{2n}(z-1)}{z}dz\longrightarrow(\pi i)^{2n+1}\qquad(\epsilon\to+0)$$

(III) $[\epsilon, 1-\epsilon']^-$ と $[\epsilon, 1-\epsilon']^+$

$$\int_{[\epsilon,1-\epsilon']^-} \frac{\log^{2n}(z-1)}{z}dz + \int_{[\epsilon,1-\epsilon']^+} \frac{\log^{2n}(z-1)}{z}dz$$

$$= \int_{\epsilon}^{1-\epsilon'} \frac{\{\log(1-x)-\pi i\}^{2n} - \{\log(1-x)+\pi i\}^{2n}}{x}dx$$

$$= -2\sum_{k-1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\int_{\epsilon}^{1-\epsilon'} \frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx$$

$$\longrightarrow \quad -2\sum_{k-1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\int_{0}^{1} \frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx \qquad (\epsilon, \epsilon' \to +0)$$

(IV) 経路　δ_1

$$\int_{\delta_1} \frac{\log^{2n}(z-1)}{z}dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log^{2n}\epsilon' e^{i\theta}}{1+\epsilon' e^{i\theta}} i\epsilon' e^{i\theta} d\theta \longrightarrow \quad 0 \qquad (\epsilon' \to +0)$$

(V) 経路　δ_M

$$\int_{\delta_M} \frac{\log^{2n}(z-1)}{z}dz$$

$$= i\int_{\pi}^{-\pi} \log^{2n}(Me^{i\theta}-1)d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{-\pi} \left\{\log^{2n}(Me^{i\theta}-1) - \log^{2n} Me^{i\theta}\right\} d\theta + i\int_{\pi}^{-\pi} \log^{2n} Me^{i\theta} d\theta$$

$$\longrightarrow \quad i\int_{\pi}^{-\pi} \log^{2n} Me^{i\theta} d\theta \qquad (M \to +\infty)$$

$$= i\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \log^k M \int_{\pi}^{-\pi} (i\theta)^{2n-k} d\theta$$

$$= -2i\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}C_{2k} \log^{2k} M \int_{0}^{\pi} (i\theta)^{2n-2k} d\theta$$

$$= -2\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}C_{2k} \frac{\log^{2k} M}{2n-2k+1}(\pi i)^{2n-2k+1}$$

$$= -2\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}\frac{(\pi i)^{2n-2k+1}}{2k}\log^{2k} M - \frac{2}{2n+1}(\pi i)^{2n+1}$$

注意．ここにも発散項 $\log^{2k} M$ が含まれている．

以上の結果をまとめると

(I) $$-2\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\int_0^1 \frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx + 2\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\cdot\frac{\log^{2k}(M+1)}{2k}$$

(II) $2(\pi i)^{2n+1}$

(III) $$-2\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\int_0^1 \frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx$$

(IV) 0

(V) $$-2\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k+1}\cdot\frac{\log^{2k} M}{2k} - \frac{2}{2n+1}(\pi i)^{2n+1}$$

Γ における積分が 0 であることより，(I)+(II)+(III)+(IV)+(V)=0

発散項については，$\log^{2k}(M+1) - \log^{2k} M \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (M \to +\infty)$ により　(I) と (V) の分が打ち消し合う．

従って

$$-\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1}(\pi i)^{2n-2k}\int_0^1 \frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx \ + \ (\pi i)^{2n}\frac{n}{2n+1} = 0$$

$\zeta(2k) = \dfrac{-1}{\Gamma(2k)}\displaystyle\int_0^1 \frac{\log^{2k-1}(1-x)}{x}dx$ を代入して

定理 2.1 　*(片山 1984)*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(\pi i)^{2n-2k}\Gamma(2k)\zeta(2k) \ + \ \frac{n}{2n+1}(\pi i)^{2n} = 0}$$

定理の式を $\zeta(2n)$ について解くと

$$\zeta(2n) = -\frac{n}{(2n+1)!}(-\pi^2)^n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-\pi)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}\cdot\zeta(2k)$$

さらに　$\zeta(2n) = a_n\pi^{2n}$ とすると

$$\boxed{a_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)!} \ - \ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}a_k}{(2n-2k+1)!}}$$

（注意．$n=1$ のときは $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}a_k}{(2n-2k+1)!}$ の部分を 0 とみなす）

この式により $\zeta(2n) \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ の値を計算することができる．

n	2	4	6	8	10	$\cdots\cdots$
$\zeta(n)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{900}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{993555}$	$\cdots\cdots$

2.2 $\zeta(3)$ が無理数であること

・$\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots$ については Euler 以来長い間多くの試みが有ったはずであるが, その性質は全くわかっていなかったそうである．ようやく 1978 年になって Roger Apéry によって[2] $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$ が示された．当時それは「Euler が見逃した証明」[3]と報告された．その方法の本質を探り当てる試みが以来 20 年間続けられているが，Apéry の結果を凌駕するものは得られていない[4]とのことである．

Apéry によるものをもっと簡明にした F.Beukers による証明[5]を以下に紹介する．証明の途中に現れる広義積分は $\displaystyle\int_0^1\cdots$ を $\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^{1-\epsilon}\cdots$ と考える．

定義 2.3 d_n を $1,\cdots,n$ の最小公倍数とする．

定義 2.4 $\pi(n)=\#\{p:\mathrm{prime},\quad p\le n\}$

補題 2.1 n が十分大のとき　$d_n<3^n$

証明）

$$d_n=\prod_{p\le n,\mathrm{prime}}p^{[\log_p n]}<\prod_{p\le n,\mathrm{prime}}p^{\log_p n}=n^{\pi(n)} \tag{2.6}$$

n が十分大のとき,

$$n^{\pi(n)}<3^n \tag{2.7}$$

$\because$) $n^{\pi(n)}<3^n\iff\pi(n)\log n<n\log 3\iff\dfrac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}}<\log 3$

素数定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}}=1$

[2]R.Apéry "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$" Astérisque 61 (1979) p.11-13

[3]A. Van der Poorten "A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of ζ (3)" Math. Intelligencer 1 (1979)

[4]志賀弘典　「伝説の数学者　ロジェ・アペリの軌跡」　数学セミナー 95 年 9 月号による．

[5]"A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$" Bull.London Math. Soc. Vol.11(1979) p.268-272

従って，n が十分大のとき，$\dfrac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}} < \log 3$ //

(2.6),(2.7) より，n が十分大のとき $d_n < 3^n$ (証明終)

補題 2.2

r, s を non-negative integers　とする．

(i) $r > s$ ならば,

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy$

は有理数で，既約分数で表したときの分母は ${d_r}^2$ を割り切る．

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dxdy$

は有理数で，既約分数で表したときの分母は ${d_r}^3$ を割り切る．

(ii) $r = s$ のとき,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dxdy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots\cdots - \frac{1}{r^2}$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r dxdy = 2\left\{\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \cdots\cdots - \frac{1}{r^3}\right\}$

注意．(c),(d) で $r = 0$ のときは $-\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} - \cdots\cdots - \dfrac{1}{r^2}$，　$-\dfrac{1}{1^3} - \dfrac{1}{2^3} - \cdots\cdots - \dfrac{1}{r^3}$ の項がなくなる．

証明）σ を non-negative number とする．次の積分を考える．

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy \tag{2.8}$$

$\displaystyle\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \quad (0 \le xy < 1)$ より,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{r+\sigma+k} y^{s+\sigma+k} dxdy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{r+\sigma+k} y^{s+\sigma+k} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left[\frac{x^{r+\sigma+k+1} y^{s+\sigma+k}}{r+\sigma+k+1}\right]_0^1 dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^{s+\sigma+k}}{r+\sigma+k+1} dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)} \tag{2.9}$$

$r > s$ とすると，

$$(2.9) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{k+\sigma+s+1} - \frac{1}{k+\sigma+r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{\sigma+s+1} + \frac{1}{\sigma+s+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sigma+r}\right) \tag{2.10}$$

(2.10) で $\sigma = 0$ とおくと，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy = \frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{r}\right\}$$

従って，(a) は成立する．

$$\frac{d}{d\sigma}\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}\log x \cdot y^{s+\sigma} + x^{r+\sigma} \cdot y^{s+\sigma}\log y}{1-xy} dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} dxdy$$

$\sigma = 0$ とすると，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dxdy \tag{2.11}$$

一方，(2.10) を σ について微分して， $\sigma = 0$ とすると，

$$\frac{-1}{r-s}\left\{\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2}\right\} \tag{2.12}$$

(2.11),(2.12) より，(b) は成立する．
$r = s$ のとき，(2.8),(2.9) より，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1-xy} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+k+r+1)^2} \tag{2.13}$$

$\sigma = 0$ とすると，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2} = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{r^2}$$

従って,(c) は成立する．
(2.13) を σ について微分すると，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^{r+\sigma} y^{r+\sigma} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(\sigma+k+r+1)^3}$$

$\sigma = 0$ とすると，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+1)^3} = -2\left\{\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\right\}$$

従って，(d) は成立する．（証明終）

補題 2.3 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ のとき，

$$\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$$

定理 2.2 $\zeta(2)$ は無理数である．[6]

証明）n : positive integer について次の積分を考える．

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)(1-y)^n}{1-xy} dxdy \tag{2.14}$$

ただし， $P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n$: Legendre 多項式とする．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^n \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k x^k\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k x^{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} x^k$$

従って， $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ である．

$$P_n(x)(1-y)^n = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} a_{r,s} x^r y^s \qquad (a_{r,s} \in \mathbb{Z})$$

および　補題 2.2 (a),(c) より，

$$(2.14) = \{A_n + B_n\zeta(2)\}\, d_n^{-2} \quad (A_n, B_n \in \mathbb{Z})$$

$$\int_0^1 \frac{(\frac{d}{dx})^n x^n(1-x)^n}{1-xy} dx = \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} x^n(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-xy}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(\frac{d}{dx})^{n-1} x^n(1-x)^n \cdot y}{(1-xy)^2} dx$$

$$= 0 - \left[(\frac{d}{dx})^{n-2} x^n(1-x)^n \cdot \frac{y}{1-xy}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(\frac{d}{dx})^{n-2} x^n(1-x)^n \cdot 2y^2}{(1-xy)^3} dx$$

[6] 実際 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ であるが，ここでは $\zeta(3)$ の証明のためのプロトタイプとして証明を述べている．

$$= \cdots\cdots$$

$$= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n n! y^n}{1-xy} dx$$

であるから，(2.14) は

$$(-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dxdy \tag{2.15}$$

となる．補題 2.3 より，積分 (2.15) の絶対値は

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)$$

で bound される．
(2.15) は non-zero より，

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| d_n^{-2} < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)$$

$\therefore n$ が十分大のとき，

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| < d_n^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)$$

$$< 9^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < \left(\frac{5}{6}\right)^n \zeta(2)$$

$$\left(\because) 9 \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 = 0.81152\cdots < \frac{5}{6} \right)$$

従って，$|A_n + B_n\zeta(2)| \quad (A_n, B_n \in \mathbb{Z})$ は n を大きくするとどれだけでも小さな正の値となりうる．それは $\zeta(2)$ が有理数であるときは不可能である．従って，$\zeta(2)$ は無理数である．(証明終)

定理 2.3 $\zeta(3)$ は無理数である．

証明）積分

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} = P_m(x)P_n(y) dxdy \tag{2.16}$$

を考える．
補題 2.2 より，(2.16) は $\{A_n + B_n\zeta(3)\} d_n^{-3} \quad (A_n, B_n \in \mathbb{Z})$ の形で書き表される．
$\dfrac{-\log xy}{1-xy} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz$ であるから，

$$(2.16) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z} dxdydz$$

これを x について n 回部分積分すると

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^nP_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz \tag{2.17}$$

ここで $w = \dfrac{1-z}{1-(1-xy)z}$ と変数変換する．これは行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-xy & -1 \end{pmatrix}$ と対応する．

$M^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1+xy & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \Delta = -xy$ より,

$z = \dfrac{1-w}{1-(1-xy)w}, \qquad dz = \dfrac{-xyw}{\{1-(1-xy)w\}^2}dw$

従って,

- $1-z = \dfrac{xyw}{1-(1-xy)w}$

- $\dfrac{x^ny^nz^n}{\{1-(1-xy)z\}^{n+1}}dz$

$$= \frac{(1-w)^n}{\{1-(1-xy)w\}^{n+1}}\cdot\frac{x^ny^nw^n}{(1-z)^{n+1}}\cdot\frac{-xyw}{\{1-(1-xy)w\}^2}dw$$

$$= \frac{-(1-w)^n}{1-(1-xy)w}dw$$

- $\begin{array}{c|c} z & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline w & 1 \longrightarrow 0 \end{array}$

$$\therefore (2.17) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-w)^nP_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw$$

これを y について n 回部分積分すると

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^nw^n(1-w)^n}{\{1-(1-xy)w\}^{n+1}}dxdydw \tag{2.18}$$

補題 2.4 $\dfrac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq (\sqrt{2}-1)^4 \quad$ *for all* $\ 0 \leq x, y, w \leq 1$

(2.4) より,

$$(2.16) < (\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydw}{1-(1-xy)w} = (\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1 \frac{-\log xy}{1-(1-xy)}dxdy = 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3)$$

(2.18) は non-zero なので,

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)|d_n^{-3} < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}$$

$$\therefore 0 < |A_n + B_n\zeta(3)| < 2\zeta(3)d_n^{\,3}(\sqrt{2}-1)^{4n}$$

補題 2.1 より

$$< 2\zeta(3)\cdot(3^n)^3\cdot(\sqrt{2}-1)^{4n} < \left(\frac{4}{5}\right)^n \zeta(3)$$

$$\left(27\times(\sqrt{2}-1)^4 = 0.794826\cdots < \frac{4}{5}\right)$$

これにより,$\zeta(3)$ は無理数である.（証明終）

注意．補題 2.3, 補題 2.4 の証明は省略した．微分して増減を調べることにより簡単に証明することができる．

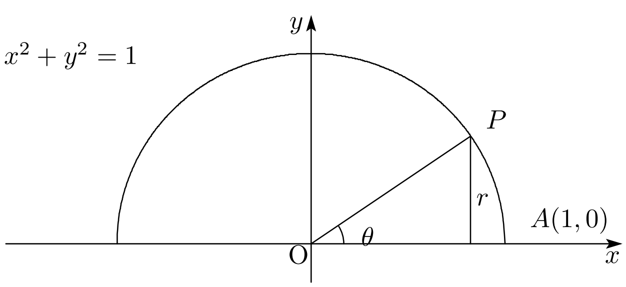
第3章　弧長から見た加法定理

「19世紀に発展した楕円関数の理論は長い歴史を持つ．それは1718年のイタリア人のファニャーノによる，レムニスケートの弧長についての著しい性質についての発見から始まる.」（C.L.Siegel著 ”Topics in complex function theory”）
ファニャーノによる積分の変形とそのプロトタイプとなる三角関数の加法定理に従った円の弧長に関する積分の変形をメモする．

3.1　三角関数 $\sin\theta$ の加法定理

3.1.1　倍角の公式

単位円上に点 $A(1,0)$, P をとる．ただし， P は第1象限の点であるとする．$\angle AOP=\theta$ とおくと，弧長 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta$．点 P から x 軸に下ろした垂線の長さを r とすると，$r=\sin\theta$．従って，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta=\sin^{-1}r$
ところで，円 $x^2+y^2=1$ の両辺を y で微分すると $2x\dfrac{dx}{dy}+2y=0$．従って，$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y}{x}$



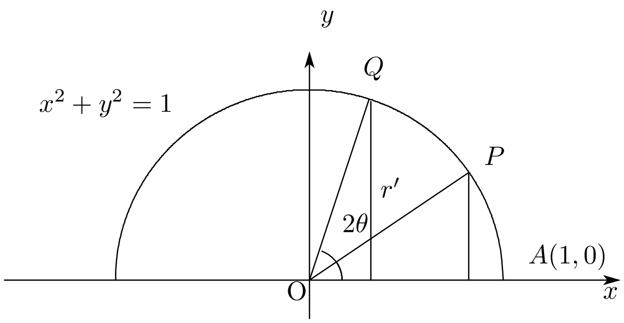
弧長は曲線の長さの公式から

$$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\int_0^r\sqrt{1+(dx/dy)^2}\,dy=\int_0^r\sqrt{1+(y/x)^2}\,dy=\int_0^r\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\therefore\ \sin^{-1}r=\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.1}$$

ここで倍角の公式について考える．
$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=2\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ すなわち 2θ を表すように点 Q を単位円上にとる．このとき，点 Q は第1象限にな

るように $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ としておく． Q から x 軸に下ろした垂線の長さを r' とする．



我々は，2 倍角の公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を知っている．従って，$r' = 2r\sqrt{1-r^2}$ が成り立つ．これを積分に適用してみる．

$\sin^{-1} r' = \displaystyle\int_0^{r'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ において　$x = 2t\sqrt{1-t^2}$ とおく．ただし，$0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-4t^2(1-t^2)} = \sqrt{1-4t^2+4t^4} = 1-2t^2$$

x	0	$\longrightarrow$	r'
t	0	$\longrightarrow$	r

$$\therefore \int_0^{r'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^r \frac{1}{1-2t^2}\cdot\frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

定理 3.1

$$\therefore r' = 2r\sqrt{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad \sin^{-1} r' = 2\sin^{-1} r$$

3.1.2　加法定理

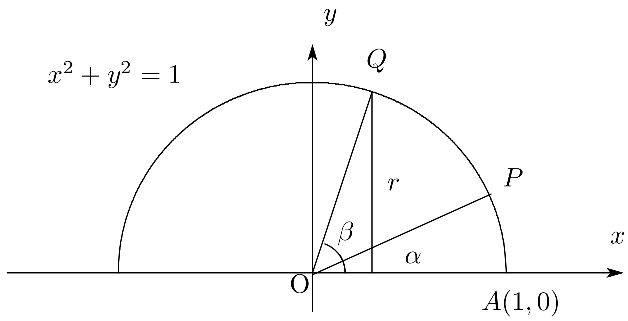
今度は加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{3.2}$$

を積分に適用してみる．

単位円上の第 1 象限に点 $A(1,0), P, Q$ を順にとり，$\angle AOP = \alpha, \angle POQ = \beta$ として，$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}} = \overset{\frown}{\mathrm{AP}} + \overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ について考える．点 Q から x 軸に下ろした垂線の長さを r とする．(3.2) に従い，$r = r_1\sqrt{1-{r_2}^2} + r_2\sqrt{1-{r_1}^2}$ を考えていく．x_0 を定数として

$$x_0 = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} \tag{3.3}$$



とする．ただし，u を独立変数，v を従属変数と考える．計算を見易くするため，$U=\sqrt{1-u^2}, V=\sqrt{1-v^2}$ とおく．

$$\frac{d}{du}U=\frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2}}=\frac{-u}{U}$$

$x_0=uV+vU$ の両辺を u で微分する．

$$0=V+u\cdot\frac{-v}{V}\frac{dv}{du}+\frac{dv}{du}\cdot U+v\cdot\frac{-u}{U}$$

$$\frac{UV-uv}{U}+\frac{UV-uv}{V}\frac{dv}{du}=0$$

$UV-uv=\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}-uv\not\equiv 0$ より，

$$\frac{1}{U}+\frac{1}{V}\frac{dv}{du}=0 \tag{3.4}$$

x_0 が $0\longrightarrow r$ のとき u が $0\longrightarrow r_1$ と変化するものとする.v は (3.3) により定まる．このとき (3.4) より

$$\frac{dv}{du}=-\frac{V}{U}=-\frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-u^2}}<0$$

であるから，v は u に対して単調減少．

u	0	$\longrightarrow$	r_1
v	r	$\longrightarrow$	r_2

(3.4) を 0 から r_1 まで u について積分する．

$$\int_0^{r_1}\frac{du}{U}+\int_0^{r_1}\frac{1}{V}\frac{dv}{du}du=0$$

$$\int_0^{r_1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}+\int_r^{r_2}\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=0$$

定理 3.2 従って，$r = r_1\sqrt{1-{r_2}^2} + r_2\sqrt{1-{r_1}^2}$ のとき

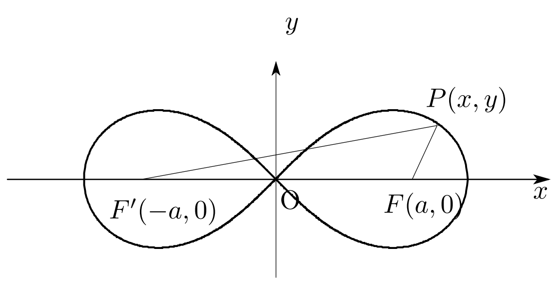
$$\int_0^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{r_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{r} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.5}$$

ただし，r_1, r_2 は小さな値としておく必要がある．

3.2 レムニスケートの加法定理

3.2.1 レムニスケートの定義と弧長

レムニスケートとは異なる 2 定点からの距離の積が一定となる点の軌跡である．2 定点を $F(a,0), F'(-a,0)$



とし，曲線が原点を通るように積が a^2 になるものとする．曲線上の点を $P(x,y)$ とおくと

$$\{(x-a)^2+y^2\}\{(x+a)^2+y^2\} = a^4$$

$$(x^2+y^2+a^2-2ax)(x^2+y^2+a^2+2ax) = a^4$$

$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4 \tag{3.6}$$

特に点 $(\pm 1, 0)$ も通るときは $(1+a^2)^2 - 4a^2 = a^4$

$$\therefore 2a^2 = 1 \tag{3.7}$$

また，$x^2+y^2=r^2$ とおいて (3.6) に代入

$$(r^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

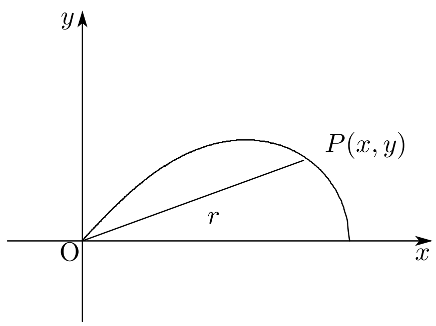
$$r^4 + 2a^2r^2 - 4a^2x^2 = 0$$

(3.7) より，

$$x^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r^4) \tag{3.8}$$

$$y^2 = r^2 - x^2 = \frac{1}{2}(r^2 - r^4) \tag{3.9}$$

三角関数の場合と同様，第 1 象限に限定して弧長を考える．(3.8) を r で微分すると



$$2x\frac{dx}{dr} = r + 2r^3 \tag{3.10}$$

従って，第 1 象限で $\dfrac{dx}{dr} > 0$ となるので r をレムニスケートのパラメータとして採用することができる．
(3.9) を r で微分すると

$$2y\frac{dy}{dr} = r - 2r^3 \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 = \frac{(r+2r^3)^2}{4x^2} + \frac{(r-2r^3)^2}{4y^2}$$

$$= \frac{1}{4x^2y^2}\{y^2(r+2r^3)^2 + x(r-2r^3)^2\}$$

(3.8),(3.9) より

$$= \frac{1}{r^4(1-r^4)}\left\{\frac{1}{2}(r^2-r^4)(r^2+4r^4+4r^6) + \frac{1}{2}(r^2+r^4)(r^2-4r^4+4r^6)\right\}$$

$$= \frac{1}{1-r^4}$$

従って，第 1 象限における原点から点 P までの弧長は

$$s = s(r) = \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{3.12}$$

(3.12) の積分形は $\sin^{-1} r = \displaystyle\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ と似た形である．

3.2.2 2倍角の公式

$\sin^{-1} r = \displaystyle\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ では $x = 2u\sqrt{1-u^2}$ と変換することにより倍角の公式になっていた. 積分形の類似から (3.12) からも倍角の公式を導くことができる．ただし，それには (3.12) を直接ではなく，$\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ からの変形を考える．
$\sin^{-1} r = \displaystyle\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ において

$$x = \frac{2t}{1+t^2} \tag{3.13}$$

と変換する．

$$dx = \frac{2(1+t^2) - 2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$$

$$1 - x^2 = 1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{r'} \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = 2\int_0^{r'} \frac{dt}{1+t^2}$$

と積分を「有理化」できる．(3.13) の変換を発展させる．

$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \longleftrightarrow x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ から $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \longleftrightarrow x^2 = \dfrac{2t^2}{1+t^4}$ と連想.
$x^2 = \dfrac{2t^2}{1+t^4}$ より

$$2xdx = \frac{4t(1+t^4) - 2t^2\cdot 4t^3}{(1+t^4)^2}dt = \frac{4t(1-t^4)}{(1+t^4)^2}dt$$

$$dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+t^4}{2t^2}}\frac{4t(1-t^4)}{(1+t^4)^2}dt = \frac{\sqrt{2}(1-t^4)}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$1 - x^4 = 1 - \left(\frac{2t^2}{1+t^4}\right)^2 = \frac{(1-t^4)^2}{(1+t^4)^2}$$

従って，

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{r_1} \frac{1+t^4}{1-t^4}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-t^4)}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}dt = \sqrt{2}\int_0^{r_1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \tag{3.14}$$

ただし，

$$r^2 = \frac{2{r_1}^2}{1+{r_1}^4}$$

これでは有理化されていない．失敗ではないかと考えず，さらに $t^2 = \dfrac{2u^2}{1-u^4}$ と変換を継続する．

$$2tdt = \frac{4u(1-u^4)-2u^2(-4u^3)}{(1-u^4)^2}du = \frac{4u(1+u^4)}{(1-u^4)^2}du$$

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u^4}{2u^2}}\frac{4u(1+u^4)}{(1-u^4)^2}du = \frac{\sqrt{2}(1+u^4)}{(1-u^4)^{\frac{3}{2}}}du$$

$$1+t^4 = 1+\left(\frac{2u^2}{1-u^4}\right)^2 = \frac{(1+u^4)^2}{(1-u^4)^2}$$

$$\therefore (3.14) = \sqrt{2}\int_0^{r_2}\frac{1-u^4}{1+u^4}\frac{\sqrt{2}(1+u^4)}{(1-u^4)^{\frac{3}{2}}}du = 2\int_0^{r_2}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

ただし，

$${r_1}^2 = \frac{2{r_2}^2}{1-{r_2}^4}$$

$$r^2 = \frac{2\left(\dfrac{2{r_2}^2}{1-{r_2}^4}\right)}{1+\left(\dfrac{2{r_2}^2}{1-{r_2}^4}\right)^2} = \frac{4{r_2}^2(1-{r_2}^4)}{(1+{r_2}^4)^2}$$

$$\therefore r = \frac{2r_2\sqrt{1-{r_2}^4}}{1+{r_2}^4}$$

定理 3.3 （ファニャーノ，*1718* 年）
$r = \dfrac{2r_2\sqrt{1-{r_2}^4}}{1+{r_2}^4}$ とおくと

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int_0^{r'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

すなわち，$s(r) = 2s(r')$

注意．以上の変形では (3.14) のところで，一旦別の積分形がでてきた．しかし，(3.14) のところでは $t = e^{\frac{\pi i}{4}}z$ とおけば，$dt = e^{\frac{\pi i}{4}}dz$

$$(3.14) = \sqrt{2}\int_0^{r_3}\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}dz}{\sqrt{1-z^4}} = (1+i)\int_0^{r_3}\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

となり，積分形を保つことができる．その代わり複素数の範囲での積分となってしまう．

3.2.3　オイラーの加法定理

$\sin^{-1} r$ の積分では加法定理の $x = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}$ で $v = u$ とおいて倍角 $x = 2u\sqrt{1-u^2}$ が得られていると考えられる．レムニスケートでは倍角 $x = \dfrac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$ のもとになる加法定理の変数変換は何であろうか？分母を u, v 対称に $1 + u^2v^2$ として

$$x = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$$

とおく．三角関数の時と同様に $x = x_0$ を定数，u を独立変数，v を従属変数とし，$U = \sqrt{1-u^4}, V = \sqrt{1-v^4}$ とおく．両辺を u で微分して

$$0 = \frac{f(u,v)}{(1+u^2v^2)^2}$$

$$f(u,v) = \left(V + u\frac{dv}{du} + \frac{dv}{du}U + v\frac{-2u^3}{U}\right)(1+u^2v^2) - (uV + vU)\left(2uv^2 + 2u^2v\frac{dv}{du}\right)$$

$$= \left[\frac{UV - 2u^3v}{U}(1+u^2v^2) - (uV + vU)\cdot 2uv^2\right]$$

$$+ \left[\frac{UV - 2uv^3}{V}(1+u^2v^2) - (uV + vU)\cdot 2u^2v\right]\frac{dv}{du}$$

$$= [1] + [2]$$

$$[1] = \frac{1}{U}\left\{(1+u^2v^2)UV - 2u^3v - 2u^5v^3 - 2u^2v^2UV - 2(1-u^4)uv^3\right\}$$

$$= \frac{1}{U}\left\{(1-u^2v^2)UV - 2uv(u^2+v^2)\right\}$$

$$[2] = \frac{1}{V}\left\{(1+u^2v^2)UV - 2uv^3 - 2u^3v^5 - 2u^2v^2UV - 2(1-v^4)u^3v\right\}\frac{dv}{du}$$

$$= \frac{1}{V}\left\{(1-u^2v^2)UV - 2uv(u^2+v^2)\right\}\frac{dv}{du}$$

従って

$$[1] + [2] = \left\{(1-u^2v^2)UV - 2uv(u^2+v^2)\right\}\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\frac{dv}{du}\right) = 0$$

ここで，共通因子

$$\left\{(1-u^2v^2)UV - 2uv(u^2+v^2)\right\} \not\equiv 0$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}+\frac{1}{\sqrt{1-v^4}}\frac{dv}{du}=0 \tag{3.15}$$

$\dfrac{dv}{du}=-\dfrac{V}{U}<0$ より，u が $0\longrightarrow r_1$ となるとき，v が $r\longrightarrow r_2$ を動くものとする．
(3.15) を u について 0 から r_1 まで積分する．

$$\int_0^{r_1}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}+\int_0^{r_1}\frac{1}{\sqrt{1-v^4}}\frac{dv}{du}du=0$$

$$\int_0^{r_1}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}+\int_r^{r_2}\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=0$$

定理 3.4 （加法定理）

$r=\dfrac{r_1\sqrt{1-{r_2}^4}+r_2\sqrt{1-{r_1}^2}}{1+{r_1}^2{r_2}^2}$ のとき

$$\int_0^{r_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\int_0^{r_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^{r}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

すなわち，$s(r_1)+s(r_2)=s(r)$

Euler はさらに $\sqrt{\quad}$ の中の式を $1-u^4$ から $P(u)=1+au^2-u^4$ とした場合について調べた．
これについても

$$x_0=\frac{uV+vU}{1+u^2v^2},\qquad U=\sqrt{P(u)},V=\sqrt{P(v)}$$

とおくことにより，

$$\frac{1}{U}+\frac{1}{V}\frac{dv}{du}=0$$

が導かれ，同様な加法定理が得られる．
また，一般の 4 次式 $P(u)$ については

$$u=\frac{aw+b}{cw+d},\qquad ad-bc\neq 0$$

という変換を用いて $H(w)=(cw+d)^4P(u)$ を考えるとき，a,b,c,d をうまくとることにより $H(w)$ を上記の物に変えることができる．このとき，

$$(ad-bc)^{-1}\frac{du}{\sqrt{P(u)}}=\frac{dw}{\sqrt{H(w)}}$$

となることから加法定理が得られる．

第 4 章　ある種のピタゴラス数と２次形式 ⋯ 課題研究から

平成９年度　砺波高校理数科の課題研究の数学第３班ではピタゴラス数，すなわち

$$\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=z^2 \quad x,y,z\in\mathbb{N}\}$$

について調べた．
内容としては，

(1) $x,y\leq 100$ であるピタゴラス数のリスト作成．

(2) 原始ピタゴラス数の媒介変数表示 $x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2$

(3) x,y,z のいずれかは３で割り切れること．

(4) x,y,z のいずれかは５で割り切れること．

(5) $z=y+1$ を満たすピタゴラス数．

(6) $|x-y|=1$ を満たすピタゴラス数．

を扱った．
(5) についてはコンピュータを用いて $x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2$ から数表を作成して，$z=y+1$ を満たすものを抜き出すと，$m=n+1$ であることがわかり，$x=2n+1, y=2n^2+2n, z=2n^2+2n+1$ と決着する．
(6) については，大変珍しいもので，リストには少ししか現れない．この章では，(6) のピタゴラス数に関する生徒の発見とその検証を解説する．

4.1　漸化式の発見

$x^2+y^2=z^2,\quad x,y,z\in\mathbb{N},\quad y=x+1$ を満たすピタゴラス数について，簡単なプログラムを用いて $x\leq 100000$ の範囲で調べてみると

$$\begin{aligned}(x,y,z)=\ &(3,4,5), && (20,21,29), && (119,120,169),\\ &(696,697,985), && (4059,4060,5741), && (23660,23661,33461)\end{aligned}$$

の６個しか見つからない．これらの数は急激に大きくなることもあり，どのような性質を持つのかを言い当てるのは難しいのではないかと思われた．媒介変数表示 $x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2$

を用いたとしても簡単ではなさそうであった．しかしながら，班員の一人[1]が，次のような事実を発見した．

定理 4.1 $x^2+y^2=z^2,\quad |x-y|=1$ を満たすピタゴラス数で x を奇数，y を偶数とするときの列を $\{(x_n,y_n,z_n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ とする．

$$x_1=3,\ x_2=21,\ x_3=119,\ x_4=697,\ x_5=4059,\ x_6=23661\cdots$$

このとき，

$$x_n=a_na_{n+1},\qquad a_1=1, a_2=3,\quad a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

が成り立つ．

この漸化式の発見過程は以下のようなものである．
まず，$x_n:3,21,119,697,4059,\cdots$ の素因数分解を考える．

$$3,\quad 21=3\times7,\quad 119=7\times17,\quad 697=17\times41,\quad 4059=41\times99,\cdots$$

x_n の素因数のうち大きい方は次の x_{n+1} の素因数になっている.（ただし，$4059=41\times99$ において 99 は素因数ではない.）
そこで，素因数を並べて考えてみる．ただし，はじめの 3 を 1×3 として，

$$a_n\ :\ 1,3,7,17,41,99,\cdots$$

という数列として，その規則を調べる．それで，見つけたのが

$$a_1=1, a_2=3,\quad a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

である．
この漸化式で得られるピタゴラス数は，$|x-y|=1$ を満たすピタゴラス数を表すことは正しく思われた。しかし，(1) ピタゴラス数を表すこと　(2)$x-y=\pm1$ となるピタゴラス数を全て網羅していること　を証明することは簡単ではなかった。課題研究発表会の際には，班にとっての未解決の課題であると報告した．

4.2　２次形式への帰着

発表会の 1ヶ月ほど後，名古屋大学の大沢健夫教授が理数科の生徒のための出張講演にいらっしゃった．昼食時にいろいろお話させていただく中でこの漸化式のことを話題にしたところ，名古屋大学の北岡良之教授に問い合わせてあげようという言ってくださった．大沢先生が名古屋に戻られた直後に北岡先生のアドバイスがＦＡＸで送られてきた．それによると，問題を 2 次形式 X^2-2Y^2 に帰着すると解決するのではないかということであった．アドバイスに従ってしばらく考えたところうまく解決したのでそれについてまとめておく．

[1]残念ながら彼は数学科を志望しているわけではない．

$x^2+y^2=z^2,\quad |x-y|=1,\quad x,y,z\in\mathbb{N}$ を２次形式 X^2-2Y^2 に帰着するには２通りの方法がある．

(方法１)　$x^2+y^2=z^2,\quad (x,y,z\in\mathbb{N}\quad x,y,z$ は互いに素$)$　を満たす原始的ピタゴラス数についての媒介変数表示

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2$$

（ただし，m,n は互いに素で，一方は偶数，他方は奇数）

において，$x=y+1$ とおくと，

$$m^2-n^2=2mn+1,\qquad m^2-2mn+n^2-2n^2=1,\qquad (m-n)^2-2n^2=1$$

$X=m-n,\quad Y=n$ とおいて $X^2-2Y^2=1$ を得る．

$x=y-1$ のときは同様にして $X^2-2Y^2=-1$ を得る．

(方法２)　$x^2+y^2=z^2$ に $y=x+1$ を代入すると

$$2x^2+2x+1=z^2,\qquad 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=z^2,\qquad (2x+1)^2-2z^2=-1$$

$X=2x+1,\quad Y=z$ とおくと $X^2-2Y^2=-1$ を得る．

方法１が北岡先生からのアドバイスのもので，それについて考察をしているうちに方法２の方が直接的ではないかと考えた．ただし，生徒の発見した漸化式につながったのは方法１のものである．方法２からは別の漸化式が得られる．

定理 4.2 $x^2+y^2=z^2, y=x+1$ を満たすピタゴラス数の列を $\{(x_n,y_n,z_n)\}$ とすると，

$$x_0=0,\, z_0=1,\quad x_{n+1}=3x_n+2z_n+1,\, z_{n+1}=4x_n+3z_n+2$$

方法２の方がシンプルなのでそちらから述べることにする．その前に２次形式の自己同型群についての一般論をまとめておかねばならない．

4.3　２次形式の自己同型群

ここでは２次形式についての用語と定理を簡単にまとめておく．証明は成書を参考のこと．

定義 4.1　２次形式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2,\quad a,b,c\in\mathbb{Z}$ に対して，$D=b^2-4ac$ を $f(x,y)$ の判別式という．

$$SL_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{Z},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1\right\}$$ とする．

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL_2\mathbb{Z}$ は２次形式 $f(x,y)$ に以下のように作用する．

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ を $f(x,y)$ に代入する．

$$ax^2+bxy+cy^2=a(\alpha x'+\beta y')^2+b(\alpha x'+\beta y')(\gamma x'+\delta y')+c(\gamma x'+\delta y')^2$$

$$= (a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)x^{'2} + \{2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\delta) + 2c\gamma\delta\}x'y' + (a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2)y^{'2}$$

$$= a'x^2 + b'xy + c'y^2$$

ただし，

$$\begin{cases} a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta \\ c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 \end{cases}$$

このとき，２つの２次形式 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ と $f'(x,y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$ は同値であるという．

定理 4.3 $D \in \mathbb{Z}$,　D は非平方数のとき，判別式 D を持つ２次形式の同値類は有限である．

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ が互いに素であるとき。２次形式 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ は原始的であるという．

定義 4.2 判別式 D の類数を以下のように定義する．

$$h(D) = \begin{cases} \text{判別式 } D \text{ の原始的２次形式の同値類の個数} & (D > 0) \\ \text{判別式 } D \text{ の正定値原始的２次形式の同値類の個数} & (D > 0) \end{cases}$$

定義 4.3 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ が $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を不変にするとき，すなわち，

$$\begin{cases} a = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\delta) + 2c\gamma\delta \\ c = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 \end{cases}$$

をみたすとき，$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を２次形式 $f(x,y)$ の自己同型という．

$f(x,y)$ の自己同型全体は $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群をなす．それを U_f と記す．

定義 4.4 整数 n の２次形式 $f(x,y)$ による表現数
$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U_f$ は $f(x,y) = n$ の解 (x,y) を他の解 (x',y') に移す. このとき，２つの解 (x,y) と (x',y') は同値であるという．
$f(x,y) = n$ の解の U_f の作用による異なる同値類の個数を $R(n,f)$ と定義する．

定義 4.5 判別式 D による全表現数 $R(n)$

$$R(n) = \sum_{k=1}^{h(d)} R(n, f_k)$$

と定義する．ただし，$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{h(d)}$ は判別式 D の２次形式の代表系である．

定理 4.4 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2, \quad D=b^2-4ac, \quad D$ は非平方数について，
$t^2-Du^2=4$ の解 (t,u) から $f(x,y)$ の自己同型群 U_f への写像

$$(t,u)\longrightarrow\begin{pmatrix}\dfrac{t-bu}{2} & -cu\\ au & \dfrac{t+bu}{2}\end{pmatrix}$$

は１：１である．さらに，

$$(t_1,u_1)\circ(t_2,u_2)=\left(\frac{t_1t_2+Du_1u_2}{2},\frac{t_1u_2+t_2u_1}{2}\right)$$

で積を入れると, 上の対応は群準同型.

$D>0$ に対しては

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\longrightarrow\epsilon=\frac{\alpha+\delta}{2}+\frac{\gamma}{2a}\sqrt{D}$$

は単射

$$U_f\longrightarrow\mathbb{R}^\times$$

を与える．$(t,u)\longrightarrow\epsilon=\dfrac{t+u\sqrt{D}}{2}$ について $\left\{\epsilon=\dfrac{t+u\sqrt{D}}{2}\right\}$ は $\epsilon_0=\dfrac{t_0+u_0\sqrt{D}}{2}$ により生成される．すなわち，$\{\pm\epsilon_0^n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ に等しく，

$$U_f\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ϵ_0 を２次形式 $f(x,y)$ の基本単数という.

定理 4.5 D : 基本単数 $\quad n\neq 0 \quad \Longrightarrow R(n)=\displaystyle\sum_{m|n}\chi_D(m)$

注意．各２次形式 f_i についての表現数 $R(n,f_i)$ についての計算は一般に難しいのであるが、トータルとしての表現数 $R(n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{h(d)}R(n,f_i)$ は上記のように計算できるのである.

4.4 ２次形式 $X^2-2Y^2=\pm1$ の解と漸化式

$f(X,Y)=X^2-2Y^2$ のとき，判別式は $D=8$ である．類数については $h(8)=1$ であることが知られているので $R(n)=R(n,f)$ となる．また，$R(1,X^2-2Y^2)=R(1)=\displaystyle\sum_{m|1}\chi_8(m)=\chi_8(1)=1$

．従って，　$X^2-2Y^2=1$ の解はすべて同値である．
$f(X,Y)=X^2-2Y^2$ の自己同型群 U_f は，ペル方程式 $t^2-8u^2=4$ の最小正の解 $(6,2)$ から写像

$$(t,u) \longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \dfrac{t+bu}{2} \end{pmatrix}$$

により定めると，$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ よって生成されることがわかる．すなわち，

$$U_f = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$$

以上より，すべての解を見つけるには
(1) $X-2Y^2=1$ の最小正の解を見つける
(2) 一般解は最小解に $\pm\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を作用させて得られる。

$X^2-2Y^2=1$ の最小正の解は $(X,Y)=(3,2)$ である．これを (X_1,Y_1) とおく．
また，$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}$
すなわち，

$$X_1=3,\, Y_1=2, \quad X_{n+1}=3X_n+4Y_n,\, Y_{n+1}=2X_n+3Y_n \tag{4.1}$$

$X^2-2Y^2=-1$ については，

$$X_1=7,\, Y_1=5, \quad X_{n+1}=3X_n+4Y_n,\, Y_{n+1}=2X_n+3Y_n \tag{4.2}$$

方法２について

$$x^2+y^2=z^2, \quad x,y,z \in \mathbb{N}, \quad y=x+1 \tag{4.3}$$

の解の列 $\{(x_n,y_n,z_n)\}$ について

$$X_n=2x_n+1, Y_n=z_n \quad (y_n=x_n+1) \tag{4.4}$$

とおけばよい．ただし，$\{(X_n,Y_n)\}$ は $X^2-2Y^2=-1$ の解の列．
(4.2) より，$x_1=\dfrac{X_1-1}{2}=3,\, y_1=x_1+1=4,\, z_1=Y_1=5$

$$\begin{cases} 2x_{n+1}+1=3(2x_n+1)+4z_n \\ z_{n+1}=2(2x_n+1)+3z_n \end{cases}$$

定理 4.6 ピタゴラス数 $x^2+y^2=z^2$ のうち， $y=x+1$ を満たすものの列 $\{(x_n.y_n,z_n)\}$ は

$$x_1=3, z_1=5, \quad x_{n+1}=3x_n+2z_n+1, z_{n+1}=4x_n+3z_n+2 \tag{4.5}$$

により得られる．

(4.5) を用いて計算すると，

$$(3,4,5), (20,21,29), (119,120,169), (696,697,985), \cdots\cdots$$

x は奇数と偶数を順に入れ替わる．

方法１について

この方法の場合， $x=m^2-n^2$ は奇数， $y=2mn$ は偶数とパリティーは決定している．そこで，第１成分に奇数が来るように並び替えると，

$$(3,4,5), (21,20,29), (119,120,169), (697,696,985), \cdots\cdots$$

これによると，$y=x+1$ と $y=x-1$ が順に入れ替わる．この様な状況から，２次形式 $f(X,Y)=X^2-2Y^2$ の同値関係を広義なものに拡張して考える．

$GL_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \middle| \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{Z}, \alpha\delta-\beta\gamma=\pm1\right\}$ による作用を用いて，

定義 4.6 広義の同値関係

$$f'(x,y)\sim f(x,y) \Longleftrightarrow f'(x,y)=(\alpha\delta-\beta\gamma)f(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y) \tag{4.6}$$

この同値関係による２次形式 f の自己同型群 U_f は $D>0$ かつ ペル方程式 $t^2-Du^2=-4$ が解を持つとき，
(1) $t^2-Du^2=-4$ の最小正の解 (t_0,u_0) を求める．
(2) $(t_0,u_0)\longrightarrow G_0=\begin{pmatrix}\dfrac{t_0-bu_0}{2} & -cu_0\\ au_0 & \dfrac{t_0+bu_0}{2}\end{pmatrix}$ により生成元を作ると，$U_f=\{\pm G_0^n|n\in\mathbb{Z}\}$

今の場合， $f(X,Y)=X^2-2Y^2$ より $D=8$

$t^2-8u^2=-4$ の最小正の解は $(t_0,u_0)=(2,1)$ ．従って，$G_0=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\left[\text{注意．}\quad G_0^2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\text{が狭義の同値の場合の生成元となる．}\right]$

$X^2-2Y^2=\pm1$ の最小正の解 $(X_1,Y_1)=(1,1)$ （この場合 $X^2-2Y^2=-1$ ）から始めて，

$$\begin{pmatrix}X_{\mu+1}\\ Y_{\mu+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_\mu\\ Y_\mu\end{pmatrix}$$

すなわち，

$$X_{\mu+1}=X_\mu+2Y_\mu, \quad Y_{\mu+1}=X_\mu+Y_\mu \tag{4.7}$$

とすればすべての解が得られる．
方法１における設定は $X_\mu = m_\mu - n_\mu, Y_\mu = n_\mu$
従って，$n_1 = 1, \quad m_1 = X_1 + n_1 = 2$
$x_1 = m_1^2 - n_1^2 = 3, \quad y_1 = 2m_1n_1 = 4$
$\{(m_\mu, n_\mu)\}$ についての漸化式は (4.7) より，

$$m_{\mu+1} - n_{\mu+1} = (m_\mu - n_\mu) + 2n_\mu, \quad n_{\mu+1} = (m_\mu - n_\mu) + n_\mu$$

$$\therefore \quad \begin{cases} m_{\mu+1} = 2m_\mu + n_\mu \\ n_{\mu+1} = m_\mu \end{cases}$$

以上より，

定理 4.7 ピタゴラス数 $x^2 + y^2 = z^2$ で $|x - y| = 1$ を満たすものの列 $\{(x_\mu, y_\mu, z_\mu)\}$ の媒介変数表示 $x_\mu = m_\mu^2 - n_\mu^2, y_\mu = 2m_\mu n_\mu, z_\mu = m_\mu^2 + n_\mu^2$ を与える列 $\{(m_\mu, n_\mu)\}$ は

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} m_{\mu+1} \\ n_{\mu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\mu \\ n_\mu \end{pmatrix}$$

によって与えられる．

μ	(m_μ, n_μ)	(x_μ, y_μ, z_μ)
1	(2,1)	(3,4,5)
2	(5,2)	(21,20,29)
3	(12,5)	(119,120,169)
4	(29,12)	(697,696,985)
5	(70,29)	(4059,4060,5741)
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

生徒の発見した漸化式について

$$x_n = a_\mu a_{\mu+1}, \qquad a_1 = 1, a_2 = 3, \quad a_{\mu+2} = 2a_{\mu+1} + a_\mu$$

の正否をについて考える．
定理 4.4 において $x_\mu = m_\mu^2 - n_\mu^2 = (m_\mu - n_\mu)(m_\mu + n_\mu)$ と分解することにより，$a_\mu = m_\mu - n_\mu, a_{\mu+1} = m_\mu + n_\mu$ となっているのではないかと気づいた．

$$\begin{pmatrix} m_{\mu+1} \\ n_{\mu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\mu \\ n_\mu \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{pmatrix} m_\mu \\ n_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_{\mu+1} \\ n_{\mu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\mu+1} \\ n_{\mu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{\mu+1} \\ m_{\mu+1} - 2n_{\mu+1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore m_\mu + n_\mu = n_{\mu+1} + (m_{\mu+1} - 2n_{\mu+1}) = m_{\mu+1} - n_{\mu+1} = a_{\mu+1}$$

$$a_{\mu+2} = m_{\mu+1} + n_{\mu+1} = (2m_\mu + n_\mu) + m_\mu = 3m_\mu + n_\mu$$

$$2a_{\mu+1} + a_\mu = 2(m_\mu + n_\mu) + (m_\mu - n_\mu) = 3m_\mu + n_\mu$$

$$\therefore a_{\mu+2} = 2a_{\mu+1} + a_\mu \quad //$$

これで，発見した漸化式が正しいことが説明された．

4.5　$x^2 + y^2 = z^2,\ y = x + k$ を満たすピタゴラス数について

ペル方程式 $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$ の解については，別の表現をすると以下のようになる．
実２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ の単数群 $O_F^\times$ は基本単数 $\epsilon = 1 + \sqrt{2}$ と -1 により生成される．すなわち， $O_F^\times = \{\pm\epsilon^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ．このとき，$\epsilon^n = X_n + Y_n\sqrt{2}$ とおくと ノルム $N_F(\epsilon) = -1$ から ${X_n}^2 - 2{Y_n}^2 = (-1)^n$ が従う．この対応により単数群の元とペル方程式の解が 1:1 に対応する．

$$X_{n+1} + Y_{n+1} = (1 + \sqrt{2})(X_n + Y_n\sqrt{2})(X_n + Y_n\sqrt{2}) = (X_n + 2Y_n) + (X_n + Y_n)\sqrt{2}$$

したがって

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 2Y_n \\ Y_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

これは前節での行列表示と同じである．$X^2 - 2Y^2 = 1$ の解については ϵ^{2n} との対応を考えればよい．

さて，次の課題として $x^2 + y^2 = z^2,\ y = x + k$ を満たすピタゴラス数を考える．k が偶数のときは， x と y は同じパリティーとなる．したがって k は奇数とする．

$y = x + k$ のとき，

$$x^2 + (x^2 + 2kx + k^2) = z^2$$

変形して，

$$(2x + k)^2 - 2z^2 = -k^2$$

$2x + k = X,\ z = Y$ とおいて $X^2 - 2Y^2 = -k^2$ の解を考える．

このとき， $R(k^2) = \displaystyle\sum_{m|k^2} \chi_8(m)$

$k=p$ ： 奇素数の場合について考える.

$$R(p^2)=\chi_8(1)+\chi_8(p)+\chi_8(p^2)=2+\chi_8(p)$$

ここで

$$\chi_8(p)=\left(\frac{2}{p}\right)=\begin{cases}1 & (p\equiv 3,5 \pmod 8)\\ -1 & p\equiv 1,7 \pmod 8)\end{cases}$$

(平方剰余の相互法則・第 2 補充法則より)
従って

$$R(p^2)=\begin{cases}1 & (p\equiv 3,5 \pmod 8)\\ 3 & (p\equiv 1,7 \pmod 8)\end{cases} \tag{4.8}$$

(1) $p\equiv 3,5 \pmod 8$ **について**
表現数が 1 であるから $X^2-2Y^2=-1$ の時と同様に，最小解を求め，その 1 つからすべての解が漸化式によって得られる．ところで $X^2-2Y^2=-1$ の解から X,Y を p 倍することにより $X^2-2Y^2=-p^2$ の解が得られることを考えると、

$$X_0=p,\ Y_0=p$$

$$X_1=7p, Y_1=5p,\quad X_{n+1}=3X_n+4Y_n,\ Y_{n+1}=2X_n+3Y_n$$

このとき,

$$x_1=\frac{X_1-p}{2}=3p,\ y_1=x_1+p=4p,\ z_1=5p$$

これは $x=3,\ y=4,\ z=5$ を p 倍しただけである. したがって、(x,y,z) は $y=x+1$ のものを p 倍しただけとなり，非原始的なものはえられない.

(2) $p\equiv 1,7 \pmod 8$ **について**
このときは表現数が 3 となるので，3 つの同値でない解の列ができる．そのうち $(X,Y)=(p,p)$ から始まる列は (1) と同様に非原始的なものになってしまう. 他の 2 つはどうであろうか？もっとも簡単な $p=7$ について考えてみる.
$X^2-2Y^2=-49$ を満たすものを小さい順にならべると

$$(X,Y)=(1,5),(7,7),(17,13),(23,17),(49,35),(103,73),\cdots\cdots$$

漸化式による列を考えると

$$(a)\ (1,5)\longrightarrow(23,17)\longrightarrow(137,97)\longrightarrow\cdots\cdots$$

$$(b)\ (7,7)\longrightarrow(49,17)\longrightarrow(287,203)\longrightarrow\cdots\cdots$$

$$(c)\ (17,13)\longrightarrow(103,73)\longrightarrow(601,455)\longrightarrow\cdots\cdots$$

と３つの系統に分類される．
(a) のとき，$(1,5)$ のときはピタゴラス数にならないので，次の $(23,17)$ を用いて，

$$x = \frac{23-7}{2} = 8,\ y = 8+7 = 15,\ z = 17$$

(b) のときは，$x = 21,\ y = 28,\ z = 35$ の非原始的なものとなる．
(c) のときは，$(17,13)$ より

$$x = \frac{17-7}{2} = 5,\ y = 5+7 = 12,\ z = 13$$

(a),(c) のときは原始的なものとなる．

定理 4.8 $x^2 + y^2 = z^2, \quad y = x + 7$ を満たすピタゴラス数 (x, y, z) は

$$(x_1, y_1, z_1) = (5, 12, 13), \qquad (x_2, y_2, z_2) = (8, 15, 17)$$

$$\begin{cases} x_{n+2} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+2} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

による２つの原始的な列と $y = x + 1$ を満たすものを７倍した非原始的な列をもつ．

その他の素数 $p \equiv 1, 7 \pmod 8$ についての場合についても２つの非原始的な列が 必ずできるかはまだ調べていない．

また，合成数については，$k = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_l}^{e_l}$ と素因数分解されているとき，

$$R(k^2) = \sum_{m|k^2} \chi_8(m) = \sum_{0 \le m_j \le e_j} \chi_8({p_1}^{m_1}{p_2}^{m_2}\cdots{p_l}^{m_l})$$

$$= \sum_{0 \le m_j \le e_j} \chi_8({p_1}^{m_1})\chi_8({p_2}^{m_2})\cdots\chi_8({p_l}^{m_l}) = \prod_{j=1}^{l} \sum_{m_j=0}^{e_j} \chi_8({p_j}^{m_j})$$

したがって

$$R(k^2) = \prod_{p_j \equiv 1,7 \pmod 8} (2e_j + 1)$$

具体的な計算はまたの機会に．

生徒が漸化式を発見したことは驚きであった．しばらくはその正しさを証明できなかったが，幸運にもアドバイスをいただいたおかげで解決することができた．２次形式の一般論をこの様な身近な問題に適用できたことはうれしい体験であった．今回も課題研究はいい勉強の機会となったと思う．

関連図書