目 次

Chapter 1

循環連分数

数Aでは実数について学ぶ．有理数と無理数の類別，有限小数と無限小数を学び，循環小数を分数で表すことなどを解説している．この章では授業の補足として，

- 有理数は有限小数もしくは循環小数表示を持つこと．
- 無理数はそれ以上の区別をしていないが（小数の範疇では区別できないが），連分数表示によりある種の無理数が区別されること．
- $\sqrt{n}$の連分数展開の特徴など

をメモしておく．[1]
$\sqrt{n}$の連分数表示についての結果は平成４年度の理数科課題研究指導中に得られたもの[2]に考察を加えたものであるである．

1.1 有理数の循環小数表示

有理数は有限小数もしくは循環小数表示を持つことを示す．
$\dfrac{n}{m}\quad (m, n \in \mathbf{N},\quad m, n$ は互いに素)について
$a_0 = \left[\dfrac{n}{m}\right],\quad b_1 = n \bmod m$ （ただし、[　]はガウス記号）
$a_1 = \left[\dfrac{b_1}{m}\right],\quad b_2 = 10b_1 \bmod m$

一般に，
$a_k = \left[\dfrac{10b_k}{m}\right],\quad b_{k+1} = 10b_k \bmod m$

と定めていく.（これは通常の割り算そのものである)
この時，$0 \leq b_k < m$ である事に注意すると次の２つの場合に分けられる．
Case 1 $\exists k, s.t.\quad b_k = 0$
このときは $b_k = b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = 0$

[1] 自然対数の底eやその有理数乗$e^{\frac{m}{n}}$，円周率πが無理数であることも高校３年生で扱える範囲にあると思う．
[2] 平成４年度　課題研究　数学　「数の性質（最大公約数,互除法,連分数）」参照

従って$\dfrac{n}{m} = a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}$と有限小数となる.

Case 2 $\forall k, b_k \neq 0$のとき,

b_kの取り得る値は$m-1$通りしかないので，$1 \leq i < j \leq m$なるi, jで$b_i = b_j$を満たすものがある．その中で最小のiをi_0，$b_{i_0} = b_j$を満たすjのうち最小のものをj_0とすると，

$a_{i_0} = a_{j_0}, a_{i_0+1} = a_{j_0+1}, a_{i_0+2} = a_{j_0+2}, \cdots$より

$$\frac{n}{m} = a_0.a_1a_2\cdots a_{i_0-1}a_{i_0}a_{i_0+1}\cdots a_{j_0-1}a_{i_0}a_{i_0+1}\cdots$$

$$= a_0.a_1a_2\cdots a_{i_0-1}\dot{a}_{i_0}a_{i_0+1}\cdots \dot{a}_{j_0-1}$$

と循環小数になる.

1.2 連分数展開

1.2.1 有理数の連分数表示

連分数

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

を$[q_0, q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n]$と表すことにする.

有理数$\frac{n}{m}$について,

$q_1 = \left[\frac{n}{m}\right], \quad r_1 = n \bmod m$とすると

$\dfrac{n}{m} = \dfrac{q_1 m + r_1}{m} = q_1 + \dfrac{r_1}{m} = q_1 + \dfrac{1}{\frac{r_1}{m}} = \left[q_1, \dfrac{r_1}{m}\right]$

次に,$q_1 = \left[\frac{m}{r_1}\right], \quad r_2 = m \bmod r_1$とすると

$\dfrac{m}{r_1} = \dfrac{q_2 r_1 + r_2}{r_1} = q_2 + \dfrac{r_2}{r_1} = q_2 + \dfrac{1}{\frac{r_2}{r_1}}$

従って,

$\dfrac{n}{m} = \left[q_1, \dfrac{r_1}{m}\right] = \left[q_1, q_2, \dfrac{r_2}{r_1}\right]$

以下同様に，$q_{k+1} = \left[\frac{r_{k-1}}{r_k}\right], \quad r_{k+1} = r_{k-1} \bmod r_k$とおくと計算を続けていくと　$m > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$と減少する整数列を得るので

$\exists k \quad s.t. \quad r_k = 0$

この時点で計算を終了させればよい.以上により次の連分数展開を得る.

$\dfrac{n}{m} = [q_1, q_2, \cdots, r_{k-1}]$

定理. 実数xが有理数である $\iff$ xは有限な連分数展開を持つ

1.2.2 無理数の連分数展開

小数表示では有理数と無理数の区別しかできなかった.[3]しかし無理数にはさらに類別がある．その中でも最も簡単（？）なものは２次無理数，すなわち整数係数の２次方程式の解となる無理数である
これにはLagrangeの定理

２次無理数 $\Longleftrightarrow$ 無限循環連分数展開をもつ.

がある．小数表示では無秩序な数が並び，面白い数だとは感じることができないような場合であっても，連分数に直すとその数の良さが見えて来ることもある.たとえばゴールデンナンバーは
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$
と表されることから,「これはきれいな数だ」と納得できるのではないだろうか.
ここでは$\sqrt{n}$の連分数展開を考えることにする.

アプローチ１.
$$q_1=[\sqrt{n}],\quad r_1=\sqrt{n}-q_1$$
$$q_{k+1}=\left[\frac{1}{r_k}\right],\quad r_{k+1}=\frac{1}{r_k}-q_{k+1}$$
により，数列$\{q_k\},\{r_k\}$を定めていくと
$$\sqrt{n}=[q_1,q_2,\cdots,q_k,\cdots]$$
と無限連分数展開できる.

しかし，上記の式をそのまま用いた単純なプログラムで，計算の途中に$r_k=r_l\,(k<l)$を検出して循環節を求めようとしたところ，割と小さなkでもおかしな結果となってしまった.原因はコンピュータ内部での$\sqrt{n}$の値の誤差，さらに無理数$\frac{1}{r_k}$の計算をするときの誤差があっという間に積もってしまったことが考えられる.

数値計算の精度を向上させる解決法もあるだろうが，$\sqrt{n}$の簡単な性質を用いて極力整数の計算だけに持ち込む方法を工夫した方がベターであると考えられる.

アプローチ2.

有理化を検討する.
$$r_k=\frac{b_k\sqrt{n}-c_k}{a_k}\quad (a_k,b_k,c_k\in\mathbf{Z},\quad a_k>0)$$
と表すことにする.

$r_1=\sqrt{n}-q_1$より　$a_1=1,b_1=1,c_1=q_1$

k番目まで定めたとすると,
$$q_{k+1}=\left[\frac{1}{r_k}\right]=\left[\frac{a_k}{b_k\sqrt{n}-c_k}\right]=\left[\frac{a_kb_k\sqrt{n}+a_kc_k}{b_k^2n-c_k^2}\right]$$
$$r_{k+1}=\frac{1}{r_k}-q_{k+1}=\frac{a_kb_k\sqrt{n}-((b_k^2n-c_k^2)q_{k+1}-a_kc_k}{b_k^2n-c_k^2}$$
従って,

[3]小数表示というのは十進法に基づくものを指す．$\sqrt{2}=1.4142\cdots$と一見無秩序に見える数の羅列になるのは$\sqrt{2}$と10がマッチしないせいであろう.2進法などで表せば　と思うのだが深く計算していない

$a_{k+1} = b_k^2 n - c_k^2$
$b_{k+1} = a_k b_k$
$c_{k+1} = (b_k^2 n - c_k^2) q_{k+1} - a_k c_k$
とできる.
この方法では誤差を生ずる可能性があるのはq_kを計算する部分で$\sqrt{n}$を用いているところだけである.その部分ではガウス記号により整数部分のみを取り出すのでまず誤差は生じないであろう.しかも，整数にしてしまうのでkを増やしていくときに誤差を持ち越して積もらせることがない.
早速この漸化式を用いてプログラムしてみると，やはりうまく行かない.a_k, b_k, c_kの値があっという間に大きくなってオーバーフローしてしまうのである．原因は分数式のところで約分をしていないからである.

アプローチ３.

簡単な例を用いて筆算で約分を実行してみるといずれも次の様な式になる.

$$r_k = \frac{\sqrt{n} - m_k}{l_k} \quad (l_k, m_k \in \mathbf{Z}) \tag{1.1}$$

すなわち，分子の$\sqrt{n}$の係数は約分の後1となってしまうのである.この事を証明する.
$k = 1$のときは，$r_1 = \sqrt{n} - q_1$より明らか.
$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{l_k}$が成り立つと仮定する.
$\dfrac{1}{r_k} = \dfrac{l_k}{\sqrt{n} - m_k} = \dfrac{l_k(\sqrt{n} + m_k)}{n - m_k^2}$

(1.1)が成り立つ $\iff$ $l_k | n - m_k^2$

$k = 1$のときは$l_1 = 1$より$l_1 | n - m_1^2$

$l_k | n - m_k^2$が成り立つと仮定する.

$$l_{k+1} = \frac{n - m_k^2}{l_k}$$

とおくと，$\dfrac{1}{r_k} = \dfrac{l_k(\sqrt{n} + m_k)}{l_k l_{k+1}} = \dfrac{\sqrt{n} + m_k}{l_{k+1}}$

$$q_{k+1} = \left[\frac{\sqrt{n} + m_k}{l_{k+1}} \right]$$

$$r_{k+1} = \frac{1}{r_k} - q_{k+1} = \frac{\sqrt{n} + m_k}{l_{k+1} - q_{k+1}} = \frac{\sqrt{n} - (l_{k+1} q_{k+1} - m_k)}{l_{k+1}}$$

従って，$m_{k+1} = l_{k+1} - m_k$とおけば，

$$r_{k+1} = \frac{\sqrt{n} - m_{k+1}}{l_{k+1}}$$

とできる．さらに

$$n - m_{k+1}^2 = n - (l_{k+1}q_{k+1} - m_k)^2 = (n - m_k)^2 - l_{k+1}(l_{k+1}q_{k+1}^2 - 2m_k q_{k+1})$$

$$= l_{k+1}l_k - l_{k+1}(l_{k+1}q_{k+1}^2 - 2m_k q_{k+1})$$

従ってl_{k+1}も$n - m_{k+1}^2$を割り切れるように定めることができた.
以上をまとめると,

定理． $\sqrt{n}$の連分数展開について

$$q_1 = [\sqrt{n}], \quad r_1 = \sqrt{n} - q_1$$

$$l_1 = 1, \quad m_1 = q_1$$

$$l_{k+1} = \frac{n - m_k^2}{l_k}, \quad q_{k+1} = \left[\frac{\sqrt{n} + m_k}{l_{k+1}}\right], \quad m_{k+1} = l_{k+1}q_{k+1} - m_k$$

により整数列$\{q_k\}$を定めていくと,

$$\sqrt{n} = [q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots]$$

と連分数展開される. また,

$$r_k = \frac{\sqrt{n} - m_k}{l_k}$$

と表される.[4]

さらにl_k, m_kは正の整数であることを示す.[5]その結果$\sqrt{n}$は循環連分数展開を持つことがいえる.

補題． $l_k > 0, m_k > 0$
証明）帰納法で示す.$l_1 = 1 > 0, \quad m_1 = q_1 = [\sqrt{n}] > 0$
$l_k > 0, \quad m_k > 0$と仮定する．$r_k = \dfrac{1}{r_{k-1}} - \left[\dfrac{1}{r_{k-1}}\right] > 0$であり，一方$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{l_k}$であるから
分子を考えて$\sqrt{n} - m_k > 0$ 　仮定から$m_k > 0$
従って，$n - m_k^2 > 0$
よって，$l_{k+1} = \dfrac{n - m_k^2}{l_k} > 0$
$m_{k+1} = l_{k+1}q_{k+1} - m_k$において

[4] 今回調べてみたところ，木田祐司　牧野潔夫　「コンピュータ整数論」　日本評論社 (1994)　にも同様な式が「便利な公式がある」と載っていた．以前から知られているものであろう．
[5] 平成4年度　課題研究　数学　「数の性質（最大公約数,互除法,連分数）」に書いた証明は不完全であった.

$l_{k+1} = \dfrac{n - m_k^2}{l_k} = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{l_k}(\sqrt{n} + m_k) = r_k(\sqrt{n} + m_k)$

$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{l_k}$ より， $\sqrt{n} = l_k r_k + m_k$

よって，$l_{k+1} = r_k(l_k r_k + 2m_k)q_{k+1} - m_k = (2r_k q_{k+1} - 1)m_k + l_k r_k^2 q_{k+1}$

ここで，$q_{k+1} = \left[\dfrac{1}{r_k}\right] \geq 1$ より $q_{k+1} \leq \dfrac{1}{r_k} \leq q_{k+1} + 1$

$\dfrac{1}{q_{k+1}} \geq r_k > \dfrac{1}{q_{k+1} + 1}$

従って，$2r_k q_{k+1} - 1 > \dfrac{2q_{k+1}}{q_{k+1} + 1} - 1 = \dfrac{q_{k+1} - 1}{q_{k+1} + 1} \geq 0$

これより，$m_{k+1} > 0$が従う．

数学的帰納法によって $\forall k \quad l_k > 0 \quad m_k > 0$ （証明終）

定理． $\sqrt{n}$は循環連分数に展開される

証明）補題よりl_k, m_kは自然数で条件$n - m_k > 0$， $l_k | n - m_k^2$をみたす．この様な自然数の組(l_k, m_k)は有限個しか存在しない．故に$r_k = \dfrac{\sqrt{n} - m_k}{l_k}$ は有限個の異なる値しか取り得ない．すなわち連分数展開は循環する．（証明終）

以上の考察に基づいて$\sqrt{n}$の連分数展開を求めるプログラムを生徒が作成した．というよりも，$\sqrt{n}$の連分数展開を求めるプログラムを作成しながら，うまく行かない部分を数学的に改良していった経過がこの考察になったのである．

求めた結果の一部をあげると

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \cdots] = [1, \dot{2}]$$

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, \cdots] = [1, \dot{1}, \dot{2}]$$

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \cdots] = [2, \dot{4}]$$

$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, \cdots] = [2, \dot{2}, \dot{4}]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sqrt{97} = [9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18, \cdots] = [9, \dot{1}, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, \dot{18}]$$

$$\sqrt{98} = [9, 1, 8, 1, 18, 1, 8, 1, 18, \cdots] = [9, \dot{1}, 8, 1, \dot{18}]$$

$$\sqrt{99} = [9, 1, 18, 1, 18, \cdots] = [9, \dot{1}, \dot{18}]$$

今回改めてこの表を見直してみると

定理（予想）． $[\sqrt{n}] = m$とすると $\sqrt{n}$の連分数展開は，第２から循環節が始まる．すなわち$[m, \dot{q_1}, q_2, \cdots, \dot{q_k}]$ であり，さらに循環節の最終項q_kは$2m$に等しい．

この証明はまだやっていない．(課題)

また，循環節の長さが１のものを見ると

$$\sqrt{2} = [1, \dot{2}]$$

$$\sqrt{5} = [2, \dot{4}]$$

$$\sqrt{10} = [3, \dot{6}]$$

$$\sqrt{17} = [4, \dot{8}]$$

$$\cdots$$

$$\sqrt{82} = [9, \dot{18}]$$

これらより，以下の事実に気付く．

定理． $\sqrt{n}$の連分数展開の循環節の長さが１である $\iff$ $n = m^2 + 1$
このとき，連分数展開は

$$\sqrt{m^2+1} = [m, \dot{2m}]$$

証明）
i) 循環節の長さが１であるとき，$\sqrt{n} = [m, \dot{k}]$ より，

$$\sqrt{n} = m + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cdots + \frac{1}{k}}}}$$

ここで，

$$k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cdots + \frac{1}{k}}} = x$$

とおくと

$$x = k + \frac{1}{x}, \quad x^2 - kx - 1 = 0$$

$x > 0$であるから，

$$x = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$$

従って，

$$\sqrt{n} = m + \frac{1}{x} = m + \frac{2}{k + \sqrt{k^2+4}} = m + \frac{-k + \sqrt{k^2+4}}{2} = \frac{(2m-k) + \sqrt{k^2+4}}{2}$$

よって，$k = 2m$, $\sqrt{n} = \frac{\sqrt{k^2+4}}{2}$ $\therefore$ $n = m^2 + 1$ //

ii)$n = m^2 + 1$のとき，$m^2 < m^2 + 1 < (m+1)^2$より，$[\sqrt{n}] = m$

$$\sqrt{m^2+1} = m + (\sqrt{m^2+1} - m) = m + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}$$

$[\sqrt{m^2+1}+m] = 2m$であるから,

$$\sqrt{m^2+1} + m = 2m + (\sqrt{m^2+1} - m) = 2m + \frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}$$

従って,

$$\sqrt{m^2+1} = [m, 2\dot{m}] \quad //$$

(証明終)

$n = m^2+1$がうまくいくなら$n = m^2-1$はと見てみれば

$$\sqrt{3} = [1, \dot{1}, \dot{2}]$$

$$\sqrt{8} = [2, \dot{1}, \dot{4}]$$

$$\sqrt{15} = [3, \dot{1}, \dot{6}]$$

$$\sqrt{24} = [4, \dot{1}, \dot{8}]$$

$$\ldots$$

$$\sqrt{80} = [8, \dot{1}, 1\dot{6}]$$

定理． $\sqrt{m^2-1} = [m-1, \dot{1}, 2(m\dot{} - 1)]$

注意．$n = m^2-1$は循環節の長さが 2 であるための必要条件ではない．例えば　$\sqrt{6} = [2, \dot{2}, \dot{4}]$

証明）$[\sqrt{m^2-1}] = m-1$ より,

$$\sqrt{m^2-1} = (m-1) + (\sqrt{m^2-1} - (m-1)) = (m-1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}}$$

$2(m-1) < \sqrt{m^2-1} + (m-1) < 2m-1$　であるから,

$$\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}}\right] = 1$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}} = 1 + \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}{2(m-1)}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}-(m-1)}{2(m-1)}}$$

$$\frac{\sqrt{m^2-1}-(m-1)}{2(m-1)}=\frac{1}{\sqrt{m^2-1}+(m-1)}$$

$[\sqrt{m^2-1}+(m-1)]=2(m-1)$ 　であるから，

$$\sqrt{m^2-1}+(m-1)=2(m-1)+(\sqrt{m^2-1}+(m-1)-2(m-1))$$

$$=2(m-1)+\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}-(m-1)}{2(m-1)}}$$

先ほどと同じ残余が現れたので以降循環する． 以上より定理が成立する． (証明終)

これら以外にも面白い性質が表の中に隠れているかもしれない．また，今後の課題としては，2次の代数的整数やもっと一般の2次無理数の連分数展開，互いに関連する2次無理数の連分数展開の間の関係などを調べることなどがあげられる.Pell方程式の整数解を$\sqrt{n}$の連分数展開から求めることも課題となるであろう．そのあたりは，２次形式による整数の表現と判別式についての考察から進んで来るとよいのであろう．

Chapter 2

解の公式

２次方程式の解の公式については数学Ｉで学ぶ．それは簡単な式変形（平方完成）によって得られる．それでは３次方程式についてはどうであろうかというのが素朴な疑問であり，理数科の課題研究でも取り上げられやすい話題ではないだろうか．

この辺りには，３次方程式の解の公式発見の先着権にまつわる物語，５次方程式の（べき根による）解の公式が存在しないことを示した若きアーベル，ガロアの物語など，数学に興味関心を抱かせるような話題も多い．数学を専攻しようなどと思いもしなかった高校１年生の頃に，数学の先生がガロアや群論ということを授業の中で話していらっしゃったことを覚えている．（実際にガロアの生涯についての本を手にしたのは高校３年生になってからだと思う）

大学の授業で自分が学んだことを振り返ると，３次，４次などの場合についてはあまり詳しくはやらず，群論を学び，ガロア理論をやって５次以上の方程式には解の公式を作ることができないことを学んだように思う．具体的なことが少なく，抽象的なことが多かった．教員となってから自分で方程式の解の公式についての研究の指導をしたことはないが，具体的な事項の基礎知識を整理し，準備を整えておきたいと思う．以下のメモは主に　高木貞治　「代数学講義」共立出版　に従った．

2.1　３次方程式の解の公式

2.1.1　Cardano の公式

簡単な変数変換により，

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{2.1}$$

の形のものを調べれば十分であることがわかる．ここで，

$$x = u + v \tag{2.2}$$

とおいて代入すると

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + a(u+v) + b = 0$$

従って

$$u^3 + v^3 = -b, \quad uv = -\frac{1}{3}a \tag{2.3}$$

を満たす u, v を求めれば，それを (2.2) に代入して x を求めることができる．
(2.3) より，u^3, v^3 は t の２次方程式　$t^2 + bt - \frac{1}{3}a = 0$ の２解である．

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

ここで，$-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$　の３乗根のうち１つを u_0 とおくと，他の３乗根は $\omega u_0, \omega^2 u_0$（ただし，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ）となる．また，$v_0 = -\frac{a}{3u_0}$ とおく．このとき，(2.3) を満たす u, v の組みは

$$(u, v) = (u_0, v_0), (\omega u_0, \omega^2 v_0), (\omega^2 u_0, \omega v_0)$$

従って方程式 (2.1) の解は

$$\alpha = u_0 + v_0, \beta = \omega u_0 + \omega^2 v_0, \gamma = \omega^2 u_0 + \omega v_0$$

となる．これを **Cardano の公式**という．[1]

2.1.2 Legendre の方法

Cardano の方法は $x = u + v$ と代入するところがうまい．でもそれには一般的な背景が存在する．そもそも解の公式というのは方程式の係数，すなわち解の基本対称式から計算していくものである．Cardano の公式で $u^3 + v^3, uv$ を考えてうまく行ったのはこれらが解についての対称式であったからであろう．Cardano の公式から

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 3v_0, \qquad \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma = 3u_0$$

と u_0, v_0 を解 α, β, γ で表すことができるが，これらの解の置換による変化を考えることにより以下の方法につながりがあることがわかる．
Legendre の方法

$$f(x) = x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

の３つの解を α, β, γ とし，$u = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, v = u = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma$ とおく．解 α, β, γ の間の置換を考えて

置換	u の像	v の像
(1,2)	ωv	$\omega^2 u$
(2,3)	v	u
(3,1)	$\omega^2 v$	ωu
(1,2,3)	$\omega^2 u$	ωv
(1,3,2)	ωv	$\omega^2 u$

[1] この公式はカルダノの著書によって公開されたのであるが，実際に発見したのはニコロ・フォンタナ（ニックネームはタルタリア）である．従ってタルタリアの公式と呼ぶのが正しいのかもしれない．そのあたりの逸話は　「100 人の数学者」日本評論社　参照.

従って，u^3+v^3, uvは解α,β,γの対称式である．故に解α,β,γの基本対称式p,q,rを用いて計算できる．

$$u^3+v^3=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\omega+\omega^2)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2)+12(\alpha\beta\gamma)$$

$$=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2)+12(\alpha\beta\gamma)$$

Chapter １でやった方法に習って対称式を崩していく．(やはり，Mathematicaを援用）最高の型は(3,0,0)でその係数は２ある．$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$

$$u^3+v^3-2(\alpha+\beta+\gamma)^3=-9(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2)$$

最高型は(2,1,0)でその係数は−９．$\lambda_1=2-1=1,\lambda_2=1-0=1,\lambda_3=0$

$$u^3+v^3-2(\alpha+\beta+\gamma)^3+9(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=27\alpha\beta\gamma$$

従って

$$u^3+v^3=2p^3-9pq+27r$$

$$uv=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\omega+\omega^2)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

従って

$$uv=p^2-3q$$

$u^3+v^3=A, uv=B$　とおくと，u^3,v^3は２次方程式

$$t^2-At+B=0$$

の２解である．

$$t=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2}$$

$$A^2-4B^3=(2p^3-9pq+27r)^2-4(p-2q)^3=-27(p^2q^2-4q^3-4p^3r+18pqr-27r^3)=-27D$$

従って，$t=\dfrac{A\pm\sqrt{-27D}}{2}$

$-27D$の平方根をどちらか一方に定め，次に$\dfrac{A+\sqrt{-27D}}{2}$の立方根のうちどれか１つをu_0とする．

また，$v_0=\dfrac{B}{u_0}$とすると，

$$\alpha+\beta+\gamma=p$$

$$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=q$$

$$\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma=r$$

行列表示すると

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\u_0\\v_0\end{pmatrix}$$

Mathematicaで逆行列を求めるにはInverse命令を用いて[2]

```
In[1]: w=(-1+I Sqrt[3])/2
In[2]=Inverse[ {{1,1,1},{1,w,w ^ 2},{1,w ^2,w}}]
Out[3] =.......
```

この結果,

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\u_0\\v_0\end{pmatrix}$$

従って

$$\alpha=\frac{1}{3}(p+u_0+v_0)$$

$$\beta=\frac{1}{3}(p+\omega u_0+\omega^2v_0)$$

$$\gamma=\frac{1}{3}(p+\omega^2u_0+\omega v_0)$$

これを**Legendreの公式** という.

注意.

$-27D$の平方根の取り方，$\dfrac{A+\sqrt{-27D}}{2}$の立方根の取り方によりu_0には6通りの可能性があるが，それらは$u_0,\omega u_0,\omega^2u_0,v_0,\omega v_0,\omega^2v_0$である．$(u,v)$の組で考えて解を求めると$\alpha,\beta,\gamma$の間の置換になるだけである.

Legendreは$u=\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma$とおいたところがうまい.これについて考える．$u=c\alpha+d\beta+e\gamma$とおく．また，解$\alpha,\beta,\gamma$の置換によって得られる$u$の値を$u_1=u,u_2,\cdots,u_6$とする.

$$f(x)=(x-u_1)(x-u_2)\cdots(x-u_6)=x^6-p_1x^5+p_2x^4-p_3x^3+p_4x^2-p_5x+p_6$$

とすると，$p_1,p_2,\cdots,p_6$は$u_1,u_2,\cdots,u_6$の対称式である.従って，α,β,γの対称式でもあるからα,β,γの基本対称式，すなわち3次方程式の係数で表すことができる.c,d,eをうまく選んで$p_1=p_2=p_4=p_5=0$とできたとすると，$u_1,u_2,\cdots,u_6$は方程式

$$x^6-p_3x^3+p_6=0$$

の解である.これはx^3についての2次方程式なのでuが解であれば$\omega u,\omega^2u$もまた解である.従って，$\exists\sigma\in S_6$ s.t. $\sigma(u)=\omega u$．このとき，$\sigma^2(u)=\omega^2u,\sigma^3(u)=u$であるから，$\sigma$は位数3．従って$\sigma=(1,2,3),(1,3,2)$．$\sigma=(1,2,3)$のときは$c\beta+d\gamma+e\alpha=\omega(c\alpha+d\beta+e\gamma)$．これを成り立たせるには，$c:d:e=1:\omega:\omega^2$．従って，$u=\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma$

[2]筆算で逆行列を求めるのも難しくない．行列表示を用いず，普通に連立方程式で解くことも容易である.

2.2 ４次方程式の解の公式

2.2.1 Ferrariの方法

Ferrari は Cardano の弟子である．
簡単な変数変換により，x^3の項を消して

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{2.4}$$

を考えれば十分であることが分かる．この方程式を

$$(x^2 + A)^2 - B(x + C)^2 = 0 \tag{2.5}$$

と変形したい．[3](2.5) を展開して

$$x^4 + (2A - B)x^2 - 2BCx + A^2 - BC^2 = 0$$

(2.4) と係数を比較すると，

$$p = 2A - B, \quad q = -2BC, \quad r = A^2 - BC^2$$

これらから B, Cを消去して整理すると

$$8A^3 - 4pA^2 - 8rA + 4pr - q^2 = 0 \tag{2.6}$$

と、A の３次方程式が得られる．これは解の公式で解けるので，解の１つを A_0とし，

$$B_0 = 2A_0 - p, C_0 = \frac{-q}{2B_0}$$

と定めて (2.5) に代入すると

$$(x^2 + A_0)^2 = B_0(x + C_0)^2, \qquad x^2 + A_0 = \pm\sqrt{B_0}(x + C_0)$$

$x^2 - \sqrt{B_0}x + A_0 - \sqrt{B_0}C_0 = 0$　とすると，

$$x = \frac{+\sqrt{B_0} \pm \sqrt{B_0 - 4A_0 + \sqrt{B_0}C_0}}{2}$$

$x^2 + \sqrt{B_0}x + A_0 - \sqrt{B_0}C_0 = 0$　とすると，

$$x = \frac{-\sqrt{B_0} \pm \sqrt{B_0 - 4A_0 - \sqrt{B_0}C_0}}{2}$$

以上により 4 つの解を得る．これらの解の間には，２次方程式の解と係数の関係から

$$x_1 + x_2 = \sqrt{B_0}, x_1x_2 = A_0 - \sqrt{B_0}C_0, x_3 + x_4 = -\sqrt{B_0}, x_3x_4 = A_0 + \sqrt{B_0}C_0$$

が成り立つ．

課題.　(2.6) の３つの解の取り方による４次方程式の解への影響？

[3] このように変形して具体的な方程式を解かせてく演習問題は高校でも見かける．

2.2.2 Euler の方法

３次方程式のCardanoの公式を模倣して４次の場合もうまく行く.

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

において，$x = u + v + w$とおくと，

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu)$$

$$\begin{aligned} x^4 &= \{u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu)\}^2 \\ &= (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu) + 4(uv + vw + wu)^2 \end{aligned}$$

$u^2 + v^2 + w^2 = A, u^2 + v^2 + w^2 = B, uvw = C$とおくと

$$x^2 = A + 2(uv + vw + wu)$$

$$x^4 = A^2 + 4A(uv + vw + wu) + 4B + 8C(u + v + w)$$

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$に代入して，

$$\begin{aligned} &A^2 + 4A(uv + vw + wu) + 4B + 8C(u + v + w) + pA \\ &\qquad +2p((uv + vw + wu) + q(u + v + w) + r = 0 \end{aligned}$$

$$A^2 + pA + 4B + r + 2(uv + vw + wu)(2A + p) + (u + v + w)(8C + q) = 0$$

従って，

$$A^2 + pA + 4B + r = 0 \tag{2.7}$$

$$2A + p = 0 \tag{2.8}$$

$$8C + q = 0 \tag{2.9}$$

を満たせばうまく行く．(2.8) より　$A = -\frac{p}{2}$　(2.7) に代入

$\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + 4B + r = 0,$　　$B = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}$　また，$C = -\frac{q}{8}$

従って u^2, v^2, w^2　は３次方程式

$$t^3 + \frac{p^2}{2}t^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}t + \frac{q}{8} = 0$$

の３解である．この３つの解をt_1, t_2, t_3として，$u = \pm\sqrt{t_1}, v = \pm\sqrt{t_2}, w = \pm\sqrt{t_3}$　ただし，$uvw = -\frac{q}{8}$　という制約条件があるから，

$$(u, v, w) = (\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}), (\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_3}), (-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_3}), (-\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_3})$$

４次方程式の解は

$$x_1 = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}, \qquad x_2 = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3},$$

$$x_3 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \qquad x_4 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

2.3 雑感

３次，４次方程式の解の公式について，その式変形を確認することは高校生にとっても難しいことではないであろう．Cardano の公式などは，誘導をうまくしてやれば休み中の課題とすることもできるかもしれない. ただし，公式を導く式変形の背景に潜む状況を理解することは容易ではないであろう．また，たとえ公式を手にしても，方程式を解くにあたって実用的なものとは言い難い．例えば，３次方程式の３解がすべて実数である場合でも必ず虚数を介した計算に持ち込まなければいけなくなる．公式を使ってうまく解けるような方程式をあらかじめ用意して，何とか適用させてみるのが精一杯のような気がする．実際に課題研究で担当された先生の話でもそうであった．今回基礎知識を整理して見た感想として，この分野では型通りに公式成立の仮定を追って確認する事，すなわち講究型の課題研究はできるが（それは十分意義のある研究だと思うが），いろいろ数値計算などの試行錯誤から考察していく探求・発見型のものはやりづらいのではないかと思う.

５次方程式の冪根による解の公式は作ることができないのだが，それを高校生向けに取り扱うのは難しいように思う.（群論の一般論をやるのではなく，方程式の根の置換群に限ってうまく題材を料理できるかなど，しっかり検討したわけではないが.）また，使える道具を冪根に限定せず少し増やしてやることによって，例えば楕円関数を用いるエルミートの方法[4]，無限冪級数を用いる方法[5]などの解の公式があるようであるが，これも難しい.

しかしながら，解の公式の発見やアーベル，ガロアの短い一生についてなどには物語として面白い（あるいはかわいそうな) 話がたくさんある．これは授業合間に話をするなど、十分活用できるのではないか.

[4]笠原　乾吉　「モジュラー方程式とエルミートの５次方程式の解法」　数学セミナー　1988 年 7,8 月号　参照

[5]青本和彦　他　「現代数学のながれ２」　岩波講座　現代数学への入門　参照

Chapter 3

対称式と判別式

２変数の対称式を基本対称式で表すことはかつては２次方程式の解と係数の関係と絡めて１年生の早い時期から練習していた. 現在の数学Ｉ，Ａでは解と係数の関係が姿を消してしまっている. しかし，一般の対称式を基本対称式で表す問題，例えば　a^2+b^2, a^3+b^3を$a+b, ab$で表すような問題は今でも練習しているし, 入試段階になれば従来と変わらない形で出題されるものと考えられる.

判別式という用語は数学Ｉから消滅してしまった.（どこへ行ってしまったのであろう？）しかし，２次方程式の判別式は数学Ｉで実質的に使用されている．これは方程式の解の対称式で，それを基本対称式，すなわち方程式の係数で計算するものである.

この章では一般の対称式が基本対称式の整数係数の多項式で表されることを復習する．[1]また，３次以上の方程式の判別式をいくつか計算してみた.

3.1　対称式の基本対称式による表現

方程式　$x^n - a_1 + x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots\cdots + (-1)^n a_n = 0$　の解を$x = x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$　とすると$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$　と因数分解されることより

$$a_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1\le k<l\le n} x_k x_l$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k = x_1x_2\cdots x_k + \cdots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\cdots x_n = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = x_1x_2\cdots x_n$$

これらを$x_1, x_2, \cdots, x_n$の基本対称式という.

例．　$n=2$のとき　$x^2 - a_1x + a_2 = 0$　解を$x = \alpha, \beta$とすると，$a_1 = \alpha+\beta,\quad a_2 = \alpha\beta$
　$n=3$のとき　$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$　解を$x = \alpha, \beta, \gamma$とすると，$a_1 = \alpha+\beta+\gamma,\quad a_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\quad a_3 = \alpha\beta\gamma$

[1]高木貞治「代数学講義」（共立出版）で勉強し直した.

定理.　対称式は基本対称式の整数係数の多項式で表される.

　定理を$n=3$の場合に証明する.一般のnについても全く同じ方法で証明される.$n=3$の場合について考えれば証明のアイディアを理解するのに十分である.従って以下では　"α,β,γの対称式は基本対称式$a_1=\alpha+\beta+\gamma$,　$a_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,　$a_3=\alpha\beta\gamma$の整数係数の多項式で表される"　を示す.

　準備.　対称式の型による整理を考える.
例えば, α,β,γの対称式の中に$\alpha^3\beta^2\gamma$という項が含まれるときは$\alpha^3\beta\gamma^2,\alpha^2\beta^3\gamma,\alpha^2\beta\gamma^3,\alpha\beta^3\gamma^2,\alpha\beta^2\gamma^3$も含まれる．しかもそれらの係数は等しい．従ってそれらをまとめて係数$*(\alpha^3\beta^2\gamma+\alpha^3\beta\gamma^2+\alpha^2\beta^3\gamma+\alpha^2\beta\gamma^3+\alpha\beta^3\gamma^2+\alpha\beta^2\gamma^3)$とする．また，これらの項の代表として$\alpha^3\beta^2\gamma$をとり，上のように整理した部分を対称式の型$(3,2,1)$の部分と呼ぶことにする．すなわち型は整数の組$(e_1,e_2,e_3)$　（ただし，$e_1\geq e_2\geq e_3\geq 0$　）で表されるものとする.
この型に辞書式順序をいれる.小さい方から順に書くと$(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(2,0,0),\cdots$とするのである.
１つの型の部分だけでできている対称式を単型という.
例えば$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$は型$(3,0,0)$の単型　　$\alpha^3\beta^2\gamma+\alpha^3\beta\gamma^2+\alpha^2\beta^3\gamma+\alpha^2\beta\gamma^3+\alpha\beta^3\gamma^2+\alpha\beta^2\gamma^3$は型$(3,2,1)$の単型　$\alpha\beta\gamma$は型$(1,1,1)$の単型．型によってはその部分に含まれる項の数が異なる.

定理の証明）
　定理を示すには単型の対称式が基本対称式の整数係数の多項式で表されることを示せば十分.
型の順序に関する数学的帰納法で示す.
i) 型$(0,0,0)$は定数，型$(1,0,0)$はa_1，型$(1,1,0)$はa_2，型$(1,1,1)$はa_3であるからＯＫ.
ii) 型(e_1,e_2,e_3)より順序が小さい単型対称式はすべてa_1,a_2,a_3の整数係数の多項式で表されているものと仮定する.
型(e_1,e_2,e_3)単型対称式S（その係数は１とする）について，その順序を下げることを考える.
　$a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3}=(\alpha+\beta+\gamma)^{\lambda_1}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^{\lambda_2}(\alpha\beta\gamma)^{\lambda_3}$に含まれる項のうち順序が最も大きい項の型は$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3,\lambda_3)$である．$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=e_1,\lambda_2+\lambda_3=e_2,\lambda_3=e_3$とおいて解くと　$\lambda_1=e_1-e_2,\lambda_2=e_2-e_3,\lambda_3=e_3$となる．従って$S_1=S-a_1^{e_1-e_2}a_2^{e_2-e_3}a_3^{e_3}$は型が$(e_1,e_2,e_3)$より小さい部分しか含まない対称式となる.仮定より$S_1$は$a_1,a_2,a_3$の整数係数の多項式で表すことが可能.

以上により単型対称式Sはa_1,a_2,a_3の整数係数の多項式で表すことができる.(証明終）

計算例.
　$S=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$
型$(3,0,0)$の単型　$\lambda_1=3,\lambda_2=0,\lambda_3=0$

$$S-a_1^3a_2^0a_3^0=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-(\alpha+\beta+\gamma)^3=-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2)-6\alpha\beta\gamma$$

$$T=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2$$

とおくと型$(2,1,0)$より　$\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=0$

$$T-a_1^1a_2^1a_3^0=T-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-3\alpha\beta\gamma=^3a_3$$

従って,

$$S = a_1^3 - 3T - 6a_3 = a_1^3 - s(a_1a_2 - 3a_3) - 6a_3 = a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3$$

すなわち

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$$

注意. 上式を変形するとよく用いられる(が生徒には難しい)因数分解

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

となる.

型 $(k,0,0)$ の単型対称式については Newton の公式が知られている.

Newton の公式. $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k=1,2,\cdots)$ とするとき,

$s_1 - a_1 = 0$
$s_2 - a_1S_1 + 2a_2 = 0$
$s_3 - a_1S_2 + a_2S_1 - 3a_3 = 0$
$\cdots\cdots\cdots$
$S_{n-1} - a_1S_{n-2} + a_2S_{n-3} - \cdots + (-1)^{n-2}a_{n-2} + S_1 + (-1)^{n-1}(n-1)a_{n-1} = 0$
$S_n - a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + S_1 + (-1)^n na_n = 0$

$S_{n+1} - a_1S_n + a_2S_{n-1} - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + S_2 + (-1)^n a_nS_1 = 0$
$\cdots\cdots\cdots$

Newton の公式より
$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1S_1 - 2a_2 = a_1^2 - 2a_2$
$S_3 = a_1S_3 - a_2S_1 + 3a_3 = a_1(a_1^2 - 2a_2) - a_1a_2 + 3a_3 = a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3 \quad (n \geq 3)$
などと型 $(k,0,0)$ の単型対称式は順次計算していくことができる.(ただし, k と n の大小に注意して公式を用いなければいけない)

課題. 型 $(e_1,e_2,e_3) \quad (e_1 \geq e_2 \geq e_3 \geq 0, \quad integers)$ を与えたとき,この型の単型対称式の基本対称式 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ による整数係数多項式表現を求めるプログラムの作成.

3.2 判別式

2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の判別式は $D = a^2 - 4b$ であることを旧カリキュラムでは解の公式のところで教えた. 現在は判別式と呼びはしないが[2], 頂点と x 軸との関係から考察させてこの式を導かせている.

いずれの方式でも以下に述べる定義のような意味を捕らえるものではない. 入試問題の演習では

[2]実際には以前同様判別式だと教え込んでいたりする. 判別式という用語を使うとどこで不都合が生じるか, なぜ教科書では使用しないのかはよく知らない. 式に命名せずにいると何を指してているのか伝達に困ってしまう.

２次方程式の解と係数の関係から解の差の平方を計算させることは多いが，それが判別式（あるいはその定数倍)だと認識することは少ない.

定義． 方程式 $x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0$ の解を $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$ とするとき，この方程式の判別式 D は

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \cdots (x_1 - x_n)^2 * (x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2 \cdots (x_2 - x_n)^2 * \cdots * (x_{n-1} - x_n)^2$$

$$= \sum_{1 \le k < l \le n} (x_k - x_l)^2$$

で定義される.
これは $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称式であるから $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の整数係数の多項式で表される.

3.2.1 ３次方程式の判別式

$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$ の解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ とする.

$$D = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

筆算では少々大変なので Mathematica を援用する．[3]

```
In[1]:=Expand[(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2]
```

Out[2]=$a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4 - \cdots$
これより D に含まれる項の最大の型は $(4, 2, 0)$ である．$\lambda_1 = 4 - 2 = 2, \lambda_2 = 2 - 0 = 2, \lambda_3 = 0$
従って次を計算する.

```
In[3]:=Expand[(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2 - (a+b+c)^2 (a b + b c + c a)^2]
```

Out[4]=$-4a^3b^3 - 4a^4bc - 6a^3b^2c - 6a^2b^3c - \cdots$
残余に含まれる項の最大型は $(4, 1, 1)$ でその係数は-4である．$\lambda_1 = 4-1 = 3, \lambda_2 = 1-1 = 0, \lambda_3 = 1$

```
In[5]:=Expand[(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2 - (a+b+c)^2 (a b + b c + c a)^2
                                          + 4 (a+b+c)^3 (a b c)]
```

Out[6]= $\cdots$
以下，残余がなくなるまで繰り返して次を得る.

$$D = a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 + 18a_1a_2a_3 - 27a_3^3$$

[3] Mathematica に入力する際には簡単のため α, β, γ の変わりに a, b, c を用いた. また，入出力表示等は実際のものとは多少異なる

注意.

1．　$x \quad \to x+\frac{1}{3}$として代入すると$x^2$の項が消える．すなわち$x^3+px+q=0$の形の方程式となる．この方程式では$a_1=0, a_2=p, a_3=-q$であるから，

$$D=-4p^3-27q^2$$

2．楕円関数論では方程式$4x^3-g_2x-g_3=0$をもとに考える. この方程式のように最高次x^nの係数が1とは限らない場合，すなわち$a_0x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n=0$の場合については

$$D=a_0^{2(n-1)}\prod_{1\le k<l\le n}(x_k-x_l)^2$$

と定義する.

$x^3-\frac{g_2}{4}x-\frac{g_3}{4}=0$については，1．で$p=-\frac{g_2}{4}, q=-\frac{g_3}{4}$とおいて　$\frac{1}{16}g_2^3-\frac{27}{16}g_3^2$

これに$a_0^2=16$を掛けて

$$D=g_2^3-27g_3^2$$

このあたりからは判別式の一次分数変換$x\to\frac{ax+b}{cx+d}$についての不変性から保型形式等への繋がりがある．機会を見つけてメモを追加することにする.

3.2.2　5次方程式　$x^5+ax+b=0$　の判別式

一般の5次方程式についての判別式は項数59の式になるそうである．Mathematicaの助けを借りたとしてもちょっと大変そうである. 上記の形の方程式に限って計算をしてみることにするのであるが, それは一般の5次方程式をその係数の平方根，立方根のみからチルンハウゼン変換と呼ばれる変数変換でこの形にまで持って来ることができるからである. さらにもう少し頑張って$x^5+tx-1=0$（Bring-Jerrardの方程式）とするのが実現可能な最簡約形だそうだ．[4]

$$D=\prod_{1\le k<l\le 5}(x_k-x_l)^2$$

の最高の型は$(8,6,4,2,0)$でその次数は20である．一方，

$$a=\sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4\le 5}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}, b=-x_1x_2x_3x_4x_5$$

であるから次数は各々4,5である．従って

$$D=\sum_{4k+5l=20}A_{k,l}a^kb^l=Aa^5+Bb^4$$

係数A,Bを求める.

1）$a=-1, b=0$のとき，方程式は　$x^5-x=0$　となり，その解は　$x=0,\pm1,\pm i$　である.

$D=(0-1)^2(0+1)^2(0-i)^2(0+i)^2*(1+1)^2(1-i)^2(1+i)^2*(-1-i)^2(-1+i)^2*(i+i)^2=1*16*4*(-4)=256$

よって，$256=A*(-1)^5 \qquad A=-256$

2）$a=0, b=-1$のとき，方程式は　$x^5-1=0$　となり，その解は$1,t,t^2,t^3,t^4$　（ただし，$t=e^{\frac{2\Pi i}{5}}$）

[4] 青本和彦　他　「現代数学の流れ２」　岩波講座　現代数学への入門　参照

$$D=(1-t)^2(1-t^2)^2(1-t^3)^2(1-t^4)^2*(t-t^2)^2(t-t^3)^2(t-t^4)^2$$
$$*(t^2-t^3)^2(t^2-t^4)^2*(t^3-t^4)^2$$

これを筆算で計算するのは容易でないように思われる.やはりMathematicaの助けを借りることにする.tの関数としてDを展開して$t=e^{\frac{2\pi i}{5}}$を代入すればよいのであるが，高校でよく教えているとおりtの式としてのDを既約多項式$t^4+t^3+t^2+t+1$で割って，その余りに代入する.MathematicaのPolynomialremainder命令を使った.

```
In[1]:=Polynomialremainder[(1-t)^2 (1-t^2)^2 (1-t^3)^2 (1-t^4)^2 (t-t^2)^2 (t-t^3)^2
        (t-t^4)^2  (t^2 -t^3)^2 (t^2 - t^4)^2  (t^3 - t^4)^2,t^4 + t^3 + t^2 + t + 1]
Out[2]=3125
```

代入するまでもなく剰余は定数になった．これを代入し、$3125 = B*(-1)^4 \qquad B = 3125$
従って、

$$D=-256a+3125b$$

3.2.3 方程式$x^n-1=0$の判別式

前節で計算した$x^5-1=0$の判別式は$D=3125=5^5$である．これはと思って他も計算してみると

$$x^2-1=0 \Rightarrow D=4=2^2$$

$$x^3-1=0 \Rightarrow D=-27=-3^3$$

$$x^4-1=0 \Rightarrow D=-256=-4^4$$

となる.

一般のnについて考察してみる.

$t=e^{\frac{2\pi i}{n}}$とおくと　方程式$x^n-1=0$の判別式は

$$D_n=(1-t)^2(1-t^2)^2(1-t^3)^2\cdots\cdots(1-t^{n-1})^2*(t-t^3)^2\cdots\cdots(t-t^{n-1})^2*$$
$$\cdots\cdots*(t^{n-2}-t^{n-1})^2$$

$$= \qquad (1-t)(1-t^2)(1-t^3)\cdots\cdots(1-t^{n-1})$$

$$*(t-1) \qquad (t-t^2)(t-t^3)\cdots\cdots(t-t^{n-1})*(-1)$$

$$*(t^2-1)(t^2-t^3) \qquad (t^3-t^4)\cdots\cdots(t^2-t^{n-1})*(-1)^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$*(t^k-1)(t^k-t^3)\cdots(t^k-t^{k-1})(t^k-t^{k+1})\cdots\cdots(t^k-t^{n-1})*(-1)^k$$

$$\cdots\cdots$$

$$*(t^{n-1}-1)(t^{n-1}-t^2)(t^{n-1}-t^3)\cdots\cdots(t^{n-1}-t^{n-2}) \qquad *(-1)^{n-1}$$

$$P_k=(t^k-1)(t^k-t^3)\cdots(t^k-t^{k-1})(t^k-t^{k+1})\cdots\cdots(t^k-t^{n-1})$$

とおくと

$$D_n=\prod_{k=0}^{n-1}(-1)^k \quad P_k$$

$f(x)=x^n-1$とすれば　P_kは$\dfrac{f(x)}{x-t^k}$に$x=t^k$を代入したものに等しい．従って，

$$P_k=\lim_{x\to t^k}\frac{f(x)}{x-t^k}=f'(t^k)=n(t^k)^{n-1}=nt^{-k}$$

$$D_n=\prod_{k=0}^{n-1}nt^{-k}=(-t^{-1})^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n$$

この値をもっと具体的に計算する．

補題１.

$$\frac{n(n-1)}{2}\equiv\begin{cases}0 \pmod 2 & (n\equiv 0,1 \pmod 4\text{のとき})\\ 1 \pmod 2 & (n\equiv 2,3 \pmod 4\text{のとき})\end{cases}$$

補題２.

$$\frac{n(n-1)}{2}\equiv\begin{cases}0 \pmod n & (n:odd\text{のとき})\\ n/2 \pmod n & (n:even\text{のとき})\end{cases}$$

証明）$n=2m-1$のとき，

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(2m-1)(2m-2)}{2}=(2m-1)(m-1)\equiv 0 \pmod{2m-1}$$

$n=2m$のとき，

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2m(2m-1)}{2}=m(2m-1)=2m*m-m\equiv m \pmod{2m}$$

以上より補題２が従う．

定理.　方程式$x^n-1=0$の判別式は

$$D_n=\begin{cases}n^n & (n\equiv 1,2 \pmod 4\text{のとき})\\ -n^n & (n\equiv 0,3 \pmod 4\text{のとき})\end{cases}$$

証明）

$n=4m$のとき，

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=1, t^{\frac{n(n-1)}{2}}=t^{n/2}=e^{\frac{2m*2\pi i}{4m}}=e^{\pi i}=-1, \quad D_n=-n^n$$

$n=4m+1$のとき，

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1, t^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1, \quad D_n = n^n$$

$n = 4m + 2$ のとき，

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = -1, t^{\frac{n(n-1)}{2}} = t^{n/2} = e^{\frac{(2m+1)*2\pi i}{4m+2}} = e^{\pi i} = -1, \quad D_n = n^n$$

$n = 4m + 3$ のとき，

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = -1, t^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1, \quad D_n = -n^n$$

（証明終)

Ubasic で簡単なプログラムを作成して上記の結果を確認した．ただし，$\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (t^i - t^j)$ を単に $t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1$（一般には既約多項式ではない）で割った余りを考えるだけでは，余りが多項式となってしまう.（さらに，n 乗根の満たす性質から数値を求める計算をしなければならない）
例えば，$n = 6$ のときは $t^5+t^4+t^3+t^2+t+1 = t^3(t^2+t+1)+(t^2+t+1) = (t^3+1)(t^2+t+1) = (t+1)(t^2-t+1)(t^2+t+1)$ と因数分解できる．このうち 1 の原始 6 乗根から出て来るのは (t^2-t+1). これを 6 次の円周等分多項式という．この円周等分多項式で割った余りを考えればよい.（注意．上で出てきた　$t+1, t^2+t+1$　はそれぞれ 2 次，3 次の円周等分多項式である.）

k次の円周等分多項式を $f_k(t)$ とすると

$$t^m - 1 = \prod_{d|m} f_d(t)$$

$$f_1(t) = t-1, f_2(t) = t+1, f_3(t) = t^2+t+1, f_4(t) = t^2+1, f_5(t) = t^4+t^3+t^2+t+1, \cdots$$

プログラムで帰納的に円周等分多項式を定めていき，配列に格納しておいて，それで割った余りを考えると欲しかった数値が得られる.

Chapter 4

いろいろな不等式

教科書や問題集等には有名な不等式が散見される．それらについてメモしておく．

4.1 Minkowskiの不等式

このセクションではC.L.Siegel著「Lectures on the Geometry of Numbers」Springer Verlagを読んだとき,そこに現れるいくつかの不等式が数学I，Aに関連することからメモしたものである.そこでは凸体についての考察を進めるためにMinkowskiの不等式を証明するのであるが，その途上でいくつかのよく知られた不等式が証明され，用いられていく.

4.1.1 Schwarzの不等式

高校の演習問題として、

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2) \tag{4.1}$$

あるいは３次元にした形で

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \tag{4.2}$$

を証明させる．これらはSchwarzの方程式の一種である．

Schwarzの不等式と呼ばれるものは，２つのベクトル$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$について，

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}| \le |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$

が成り立つことを示す不等式の総称であろう．例えば、$0 \le x \le 1$で連続な関数のなすベクトル空間[1]において

$$|\int_0^1 f(x)g(x)dx| \le \sqrt{\int_0^1 \{(f(x)\}^2 dx}\sqrt{\int_0^1 \{(g(x)\}^2 dx}$$

が成り立つこともSchwarzの方程式と呼ぶが、これも上のような内積と絶対値の間の不等式として捉えられる.

[1]連続ではなくもっとふさわしい性質があるだろうが...

ここでは、(4.1),(4.2) の形のもの、すなわち n 次元ユークリッド空間に最も基本的な内積に適用した時の不等式について述べる.

Schwarzの不等式 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n), b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$|\sum_{j=1}^n a_jb_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n b_j^2}$$

証明）$n=3$ の時の (4.2) の証明（高校でやる）について考えれば、一般の場合にどうすればよいか容易に推測される。
(4.2) の左辺ー右辺$=(a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2)-2(a_1b_1a_2b_2+a_2b_2a_3b_3+a_3b_3a_1b_1)=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2\ge 0$
これを一般にして、

$$\begin{aligned}
&(\sum_{j=1}^n a_j^2)(\sum_{j=1}^n b_j^2)-(\sum_{j=1}^n a_jb_j)^2\\
&=(\sum_{1\le i<j\le n} a_i^2b_j^2+\sum_{i=1}^n a_i^2b_i^2+\sum_{1\le i<j\le n} a_j^2b_i^2)-(\sum_{i=1}^n a_i^2b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} a_ib_ia_jb_j)\\
&=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i^2b_j^2-2a_ib_ja_jb_i+a_j^2b_i^2)=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\ge 0
\end{aligned}$$

（証明終）

4.1.2 Hölderの不等式，相加平均・相乗平均の関係式

相加平均・相乗平均の関係式

$$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\qquad (x,y>0) \tag{4.3}$$

は数学Aの学習事項であり、大学入試でも好んで出題されてきた．ところで不等式(4.3) の左辺は数直線上で２点 x,y の中点を表しているのであるが，中点ではなく $p:1-p\quad(0\le p\le 1)$ の比に内分した点に置き換えたものが
Hölderの不等式

$$(1-p)x+py\ge x^{1-p}y^p \tag{4.4}$$

である．
(4.4) の変数を n 個に増やして，

重み付き相加平均・相乗平均の関係式

$$0\le p_1,p_2,\cdots,p_n\le 1,\quad \sum_{j=1}^n p_j=1,\quad x_1,x_2,\cdots,x_n>0$$

に対して、

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \geq x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \tag{4.5}$$

注意　(4.5) において $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ とすると,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1x_2\cdots x_n)^{1/n} \tag{4.6}$$

(4.5) は (4.6) の一般化である.

(4.5) を証明する.
$r > 0$,　$M_r = (p_1x_1^r + p_2x_2^r + \cdots + p_nx_n^r)^{1/r}$ とおく. ($r = 1$ とすれば (4.5) の右辺である.)
また, $M_0 = x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}$ とする.
Schwarz の不等式

$$(\sum_{j=1}^n a_jb_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^n a_j^2)(\sum_{j=1}^n b_j^2)$$

において,$a_j = \sqrt{p_j}, b_j = \sqrt{p_j}x_j^r$ とおくと,

$$(\sum_{j=1}^n p_jx_j^r)^2 \leq (\sum_{j=1}^n p_j)(\sum_{j=1}^n p_jx_j^{2r}), \qquad (M_r)^{2r} \leq 1 * (M_{2r})^{2r}$$

$$(M_r) \leq (M_{2r}) \tag{4.7}$$

従って、

$$M_1 \geq M_{\frac{1}{2}} \geq M_{\frac{1}{4}} \geq M_{\frac{1}{8}} \geq \cdots \tag{4.8}$$

ここで,

$$\lim_{r\to+0} M_r = M_0 \tag{4.9}$$

を示す.

$$\log M_r = \frac{1}{r}\log(\sum_{j=1}^n p_jx_j^r) = \frac{1}{r}\log(1 + \sum_{j=1}^n p_j(x_j^r - 1))$$

において

$$x_j^r - 1 = e^{r\log x_j} - 1 = (1 + r\log x_j + \frac{(r\log x_j)^2}{2!} + \cdots) - 1 = r\log x_j + O(r^2) \quad (r \to +0)$$

[2] 従って,

$$\frac{1}{r}\log(1 + r\sum_{j=1}^n p_j\log x_j + O(r^2)) = \sum_{j=1}^n p_j\log x_j + O(r) \quad (r \to +0)$$

$$\lim_{r\to+0}\log M_r = \sum_{j=1}^n p_j\log x_j = \log\prod_{j=1}^n x_j^{p_j} = \log M_0$$

[2] $r \to +0$ のとき r^2 の order

関数$\log x$は連続であるから，$\lim_{r \to +0} M_r = M_0$ //
(4.8),(4.9) より　$M_1 \geq M_0$　すなわち (4.5) が成立する．　（証明終）

Hölder の不等式は (4.5) で$n = 2, p_1 = p, p_2 = 1 - p$とすればよい．

Siegel のテキストによる重み付き相加・相乗平均の関係式 (4.5) の証明は上記の通りであるが，これでは高校生向けではない．従って以下に別証を与える．

(4.5) の別証）

nについての帰納法で示す．
i)$n = 1$のときは，$p_1 = 1$より明らか．
ii)$n - 1$まで成立するものと仮定する．nのときについてはx_nを変数xとして関数

$$f(x) = p_1x_1 + \cdots + p_{n-1}x_{n-1} + p_nx - x_1^{p_1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}} x^{p_n}$$

を考える．

$$f'(x) = p_n - p_nx_1^{p_1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}} x^{p_n - 1}$$

$f'(\alpha) = 0$とすると

$$\alpha^{1-p_n} = x_1^{p_1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}}, \qquad \alpha = x_1^{\frac{p_1}{1-p_n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{1-p_n}}$$

$f'(x)$の符号を考えて，$x > 0$のとき$f(x)$は$x = \alpha$で極小かつ最小

$$f(\alpha) = p_1x_1 + \cdots + p_{n-1}x_{n-1} + p_n\alpha - \alpha^{1-p_n}\alpha^{p_n} = p_1x_1 + \cdots + p_{n-1}x_{n-1} - (1 - p_n)\alpha$$

$$= p_1x_1 + \cdots + p_{n-1}x_{n-1} - (1 - p_n)x_1^{\frac{p_1}{1-p_n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{1-p_n}}$$

$$= (1 - p_n)(\frac{p_1}{1 - p_n}x_1 + \cdots + \frac{p_{n-1}}{1 - p_n}x_{n-1} - x_1^{\frac{p_1}{1-p_n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{1-p_n}}$$

$$p_1' = \frac{p_1}{1 - p_n}, \cdots, p_{n-1}' = \frac{p_{n-1}}{1 - p_n}$$

とおくと，

$$p_1', \cdots, p_{n-1}' \geq 0, \qquad p_1' + \cdots + p_{n-1}' = \frac{p_1 + \cdots + p_{n-1}}{1 - p_n} = 1$$

帰納法の仮定より

$$p_1'x_1 + \cdots + p_{n-1}'x_{n-1} - x_1^{p_1'} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}'} \geq 0$$

従って，$f(\alpha) \geq 0$　すなわち$x > 0$のとき，$f(x) \geq 0$が成り立つ．
数学的帰納法により (4.5) はすべての自然数nについて成立する．　(証明終)

4.1.3 Minkowskiの不等式

Minkowskiの不等式

$r \geq 1, x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0, y_1, y_2, \cdots, y_n \geq 0$のとき,

$$(\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}} + (\sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}} \tag{4.10}$$

証明）Hölderの不等式より,

$$(1-p)x_j + py_j \geq x_j^{1-p} y_j^p$$

$j = 1, 2, \cdots, n$について和をとり,

$$(1-p)\sum_{j=1}^{n} x_j + p\sum_{j=1}^{n} y_j \geq \sum_{j=1}^{n} x_j^{1-p} y_j^p \tag{4.11}$$

仮に $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ が成り立つとすれば、(4.11) に代入して

$$1 \geq \sum_{j=1}^{n} x_j^{1-p} y_j^p$$

一般の $\sum_{j=1}^{n} x_j = K > 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = L > 0$ については

$$x'_j = \frac{x_j}{K}, \qquad y'_j = \frac{y_j}{L}$$

とおくと,

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} y'_j = 1$$

であるから,

$$1 \geq \sum_{j=1}^{n} {x'}_j^{1-p} {y'}_j^p, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j^{1-p} y_j^p \leq K^{1-p} L^p$$

従って

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{1-p} y_j^p \leq (\sum_{j=1}^{n} x_j)^{1-p} (\sum_{j=1}^{n} y_j)^p \tag{4.12}$$

これは,$K = 0, L = 0$のときもいえる．[3]さらに$z_j = x_j + y_j$とおく.

$$z_j^r = z_j \cdot z_j^{r-1} = (x_j + y_j) \cdot z_j^{r-1} = x_j z_j^{r-1} + y_j z_j^{r-1} = (x_j^r)^{\frac{1}{r}} (z_j^r)^{\frac{r-1}{r}} + (y_j^r)^{\frac{1}{r}} (z_j^r)^{\frac{r-1}{r}}$$

(4.12)を応用して,

---

[3] (4.12)で$p = 1/2, x_j = a_j^2, y_j = b_j^2$とおくとSchwarzの不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq (\sum_{j=1}^{n} a_j^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^{n} b_j^2)^{1/2}$となる．すなわち，(4.12)はSchwarzの不等式の重み付き拡張であると言える.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}}(z_j^r)^{\frac{r-1}{r}} \leq (\sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}}(\sum_{j=1}^{n} z_j^r)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}}(z_j^r)^{\frac{r-1}{r}} \leq (\sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}}(\sum_{j=1}^{n} z_j^r)^{\frac{r-1}{r}}$$

従って,

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^r \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}}(z_j^r)^{\frac{r-1}{r}} + \sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}}(z_j^r)^{\frac{r-1}{r}} = (\sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}} + \sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}})(\sum_{j=1}^{n} z_j^r)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} z_j^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}} + \sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}})$$

以上より,

$$(\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_{j=1}^{n} x_j^r)^{\frac{1}{r}} + \sum_{j=1}^{n} y_j^r)^{\frac{1}{r}})$$

（証明終）

$f_r(x) = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^r)^{1/r} \qquad (x = (x_1, x_2, \cdots, x_n))$ とおくとき, Minkowski の不等式により $f_r(x)$ は even guage function であることがわかる．$f_r(x)$ の定める凸体 $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n | f_r(x) < 1\}$ は
$n = 2, r = 1$ のとき，$B_1 = \{x \in \mathbf{R}^n || x| + |y| < 1\}$
$n = 2, r = 1$ のとき，$B_2 = \{x \in \mathbf{R}^n | x^2 + y^2 < 1\}$ （単位円）

4.2 Jensen の不等式

[4]数学Aでは,
$0 < p < 1$ のとき，$(1-p)x^2 + py^2 \geq \{(1-p)x + py\}^2$ を示せ.
などの問題が出題される.
これは単純に差をとり，平方完成に持ち込んで証明させる問題である．しかし，出題には凸関数の性質が動機となっているに違いない．次の定理がある.

Jensen の不等式 グラフが下に凸である関数 $f(x)$ について

$$\frac{f(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n} \geq f(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n})$$

[4] Jensen の不等式などについては，最近の富山高校　川西先生の発表でも触れられていた.

これは定理なのか，あるいは下に凸であることの定義がこの不等式（の $n=2$ のとき）を満たすことというべきなのか．よく注意していなければ，問題を証明しないままで終わってしまっている場合も有りそうである．

第２次導関数 $f"(x)$ が存在するという恵まれた条件の $f(x)$ については

グラフが下に凸 $\Longleftrightarrow$ $f"(x) \geq 0$

従って，ここでは定義域で $f"(x) \geq 0$[5] を満たす関数 $f(x)$ について

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \geq f(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}) \tag{4.13}$$

を Jensen の不等式と呼ぶことにする．

(4.13) を示すために Talor の公式を用いる．

定義域に含まれる t を基準にして

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2!}f"(\xi)(x-t)^2 \quad (\xi=t+\theta(x-t), 0<\theta<1))$$

条件より，$f"(x)(x-t)^2 \geq 0$ であるから，

$$f(x) \geq f(t)+f'(t)(x-t)$$

$x=x_1, x_2, \cdots, x_n$ を代入して両辺の和を取ると

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geq nf(t)+f'(t)(x_1+x_2+\cdots x_n-nt)$$

上式に $t=\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$ を代入すると,(4.13) が成立する.（証明終)

(4.13) は等重 n 点の重心についての不等式であるが，重み付きにしても同様な不等式が成立するであろう．

数学 I，A ではないが，次の様な入試問題があった．

平成 7 年度　東京大学

$$f(x)=1-\sin x, \qquad g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

のとき，

$$g(x+y)+g(x-y) \geq 2g(x)$$

を示せ．

$g"(x)=f(x)=1-\sin x \geq 0$ であるから，関数 $y=g(x)$ のグラフは下に凸である．また，$s=x+y, t=x-y$ とおくと，$\dfrac{s+t}{2}=x$．グラフが下に凸であるから $\dfrac{g(s)+g(t)}{2} \geq g(\dfrac{s+t}{2})$ が成立．従って与式は成立．という解答で一見良さそうだが，高校での「$g"(x) \geq 0 \implies$ 下に凸」がどのような説明であったかを考えると，証明したことにならないのではないかと思われる．（では，どのように？ $g"(x)=f(x)=1-\sin x$ から $g(x)$ を求めてしまうか，2 つの変数 x, y の一方を固定し，一方の変数で微分していき，増減を考えて行く様な解法がいいのでは...）

[5] 等号がはいっているので「広義の $\cdots$ 」と解釈する

4.3 Čebyšev（チェビシェフ）の不等式

数学Aの教科書傍用問題集に次の様な問題が載っている．[6]

・$p \leq q \leq r,\quad x \leq y \leq z$ 　のとき，次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

$$(1)2(px+qy) \geq (p+q)$$

$$(2)3(px+qy+rz) \geq (p+q+r)(x+y+z)$$

これを一般にしたものが

Čebyšev（チェビシェフ）の不等式

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots n,\quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$のとき，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$$

証明）

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)-(a_1+a_2+\cdots+n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$= n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$$

$$-\begin{pmatrix} a_1b_1+a_1b_2+\cdots\cdots+a_1b_n \\ +a_2b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_2b_n \\ + \qquad \cdots\cdots \\ +a_nb_1+a_nb_2+\cdots\cdots+a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$= (n-1)a_1b_1-a_1b_1-a_1b_3+\cdots\cdots-a_1b_n$$

$$-a_2b_1+(n-1)a_2b_2-a_2b_3-\cdots\cdots-a_2b_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$-a_kb_1-a_kb_2-\cdots+(n-1)a_kb_k-\cdots-a_kb_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$-a_nb_1-a_nb_2-\cdots\cdots-a_nb_{n-1}+(n-1)a_nb_n$$

$$= \qquad a_1(b_1-b_2)+a_1(b_1-b_3)+\cdots\cdots+a_1(b_1-b_n)$$

$$+a_2(b_2-b_1) \qquad +a_2(b_2-b_3)+\cdots\cdots+a_2(b_2-b_n)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

[6] 数研出版　サクシード数学A

$$+a_n(b_n-b_1)+a_n(b_n-b_3)+\cdots\cdots+a_n(b_n-b_{n-1})$$

$$=\sum_{i<j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geq 0 \qquad //$$

教科書傍用問題集では　(1) をもとに (2) を考えさせるのだが[7]，それには（少なくとも）次の 2 通りがある．

i)(1) を 3 回使う．すなわち，

$$2(px+qy)\geq(p+q)(x+y), 2(qy+rz)\geq(q+r)(y+z), 2(rz+px)\geq(r+p)(z+x)$$

これら 3 式を辺々足して，

$$4(px+qy+rz)\geq(p+q)(x+y)+(q+r)(y+z)+(r+p)(z+x)$$

$$(p+q)(x+y)+(q+r)(y+z)+(r+p)(z+x)$$

$$=p(2x+y+z)+q(x+2y+z)+r(x+y+2z)$$

$$=(p+q+r)(x+y+z)+(px+qy+rz)$$

従って与式は成立．

ii)(1) を証明できたのは，

$$2(px+qy)-(p+q)(x+y)=(p-q)(x-y)$$

と変形できたから．この変形に注目して (2) の場合も同様な項の和に直す．

このうち，一般の n に通用しやすいのは ii) の方法である．

4.4 その他の不等式

・問題集に次の不等式がある．

$a>0, b>0, c>0$ のとき，

$$(1)\,\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}$$

$$(2)\,\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

これを一般にすると，$p_1>0, p_2>0, \cdots, p_n>0$ のとき，

$$\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{p_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{p_1+p_2+\cdots+P_n}$$

[7] ポイントには　「3 変数の不等式は 2 変数の場合から類推すると簡単な場合がある．」と書いてある．

この不等式は n についての帰納法により証明することができる．また，等号成立条件は $p_1 : p_2 : \cdots : p_n = x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ である．
この不等式が何か名前を持つような有名不等式なのか，もしくはこれまでにあげた不等式からすぐ出る結果なのかは調べていない．

・次のような不等式もよく見かける．

$|x| < 1, |y| < 1$　のとき，$|\dfrac{x+y}{1+xy}| < 1$
関数論のなかで　「単位円　$|z| < 1$　からそれ自身への 1:1，等角写像は　$f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-az}$ に限る」　というものがある．(a は原点に写される単位円内の点で，それと単位円について対称な点 $1/a$ は無限遠点に写される)　出所がこれなのかはよくわからない．

Chapter 5

漸化式

ある先生[1]の所へInternetのホームページ作りについて相談しに行ったところ，雑談の中で「Mathematicaを使って数学の模擬試験を解いてみているのですよ.」ということで,解法を見せてもらった．その中でも漸化式の解き方が，数学教師とは少し違った視点からのものであり興味を引いたので，自分でもさらに詳しく調べてみた．

対象とした漸化式は，砺波高校で補習教材として用いている「数列の漸化式（パターン別解法)」に載っているものから選んだ．旧教育課程では２年生の夏にこの教材を用いていた．新課程になって初年度は１年生の冬に用いたが，定着が思わしくなかったようである．早い時期で基礎知識が少なかったというわけではないが，いろいろな漸化式に立ち向かえるような状態になるには数学をもう少しやってからではないと　という感じではないだろうか.（２年目は春休みに取り扱った. 3年目は $\cdots$ ）新課程が１年に数列を取り入れたのは，数を並べたものは親しみ易いこと，コンピュータを用いて試してみることができる題材であることなどが理由であろう．それと大学入試レベルの漸化式とは別である．大学入試レベルの漸化式を（そのほとんどのパターンを）どの時期に教えるかということについては，さらに検討することが必要であると思う．

5.1　Mathematicaを用いた漸化式の解法

5.1.1　Tableにより一般項の式が予想できるもの

どんな漸化式も，きっちり解かなければいけないものなのか？

• **漸化式１**

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2n - 1 \tag{5.1}$$

で定義される数列$\{a_n\}$のTableを考える．Mathematicaで

```
In[1]:=a[1]:=1
In[2]:=a[n_]:=a[n] + 2 n - 1
In[3]:=Table[a[n],{n,1,10}]
Out[3]:={1,4,9,16,25,36,49,64,81,100}
```

これを見れば，

[1]高岡南高校　伊藤義秋先生（社会）

$$a_n = n^2 \tag{5.2}$$

であることが容易に見抜ける．それが正しいことは，(5.2) が (5.1) を満たすことを確かめればよい．

普通，(5.1) を解くには，階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を考え，$n \geq 2$ のとき，

$$a_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

を用いるのだ，と教える．大学入試に通用する (＝減点されない) 答案を書かせるには，$n = 1, n \geq 2$ の区別をすること，$\sum$ の計算を間違いなくやることなどを指導せねばならず，容易ではない． 1年次における新課程のこの題材の趣旨はその様なことではないだろう．まず規則を見抜くことが肝心である．

上の例のほか，$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})a_n$ も見た目は難しそうであるが，Table を作るとすぐ分かる．

5.1.2 Fit コマンドによる漸化式の解法

関数を探し当てるコマンド Fit を用いて漸化式の解法を考える．

• 漸化式２

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \tag{5.3}$$

について上と同様の Table を作ると

$$\{1, 5, 17, 53, 161, 485, 1457, 4373, 13121, 39365\}$$

これから一般項の式を予想するのは難しい．

Fit コマンド

Fit[{ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ } , { $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ },x]

は，関数 $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x)$ が

$$f(1) = y_1, f(2) = y_2, \cdots, f(n) = y_n$$

を満たすように定数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ を最小２乗法で求めるものである．

(5.3) では漸化式の形から $f_1(x) = 1, f_2(x) = 3^x$ として考える．Table から続けて

```
In[3]:= Fit[%,{1,3^n},n]
```

Out[3]:= $-1. + 0.666667 \quad 3^n$

従って，

$$a_n = \frac{2}{3}3^n - 1$$

漸化式３

$$a_1 = 1, \quad (n+1)a_{n+1} = na_n + 2n - 1 \tag{5.4}$$

普通は $na_n = b_n$ と置いて階差数列に持ち込むのであろうが，Fit コマンドによる解法を試す.

```
In[1]:=a[1]:=1
In[2]:=a[n_]:=((n-1) a[n-1] + 2 n - 3)/n
In[3]:=Table[a[n],{n,1,10}]
```

Out[3]=$\{1, 1, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{17}{5}, \frac{13}{3}, \frac{37}{7}, \frac{25}{4}, \frac{65}{9}, \frac{41}{5}\}$
一般項の式は思い付かない．並んだ項が分数になることから，とりあえず

$$f_1 = 1, f_2 = n, f_3 = n^2, f_4 = \frac{1}{n}, f_5 = \frac{1}{n^2}$$

を基底として考えてみる.

```
In[4]:= Fit[%,{1,n,n^2,1/n,1/n^2},n]
```

Out[4]= $-2. + \frac{1.97342 \quad 10^{-14}}{n^2} + \frac{2.}{n} + 1. \quad n + 5.73977 \quad 10^{-16} \quad n^2$

$\frac{1}{n^2}, n^2$ の係数は 0 と考えてよいから，

$$a_n = n + \frac{2}{n} - 2$$

これがあっているか確かめる.

```
In[5]:=a[n_]:=n + 2/n - 2
In[6]:=Table[a[n],{n,1,10}]
```

Out[6]=$\{1, 1, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{17}{5}, \frac{13}{3}, \frac{37}{7}, \frac{25}{4}, \frac{65}{9}, \frac{41}{5}\}$
前の Table と一致している. 厳密には (5.4) を満たすことを確かめるのだが，それは容易である.

- **３項間の漸化式１**

$$a_1 = 1, a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

特性方程式を立てて，その解を用いる.
$x^2 = 5x - 6$ とおくと,$x = 2, 3$

```
In[1]:=a[1]:=1
In[2]:=a[2]:=4
In[3]:=a[n_]:=5 a[n-1] - 6 a[n-2]
In[4]:=Table[a[n],{n,1,10}]
```

Out[4]=$\{1, 4, 14, 46, 146, 454, 1394, 4246, 12866, 38854\}$

```
In[5]:=Fit[%,{1,2^n,2^n,3^n},n]
```

Out[5]=$3.74710^13 - 0.5 \quad 2^n + 0.666667 \quad 3^n$
従って,

$$a_n = -\frac{1}{2}2^n + \frac{2}{3}3^n$$

- **Fibonacci 数列**

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Table を作ると Out[3]={ 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55 }
特性方程式を解く.

```
In[4]:=Solve[x^2==x+1 ]
```

Out[4]:={ { x -¿ $\frac{1-Sqrt[5]}{2}$}, $\{x- > \frac{1-Sqrt[5]}{2}$ }}

```
In[5]:=b:=(1-Sqrt[5])/2
In[6]:=c:=(1+Sqrt[5])/2
In[7]:=Fit[%3,{ 1,b^n,c^n } ,n ]
```

Out[7]=$6.52256 \quad 10^{-16} - 0.447214 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - Sqrt[5])^n + 0.447214 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + Sqrt[5])^n$
従って,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{(1-\sqrt{5})^n + (1+\sqrt{5})^n\right\}$$

ただし, $0.447214 = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ であることに気付かなければいけない.

5.1.3 行列の対角化と漸化式の解法

- **連立漸化式**

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について, $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

α, βを行列 A の固有値とし, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と対角化されるとき, (5.5) は

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

とできるから,

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{n-1} P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{n-1} P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

従って,a_n, b_nは$\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}$の１次結合で表される.

- **例**　$a_1 = 0, b_1 = 0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 6b_n \end{cases}$$

について

```
In[1]:=a[1]:=1
In[2]:=b[1]:=0
In[3]:=a[n_]:=3 a[n-1] + 2 b[n-1]
In[4]:=b[n_]:=2 a[n-1] + 6 b[n-1]
In[5]:=Table[a[n],{n,1,10}]
Out[5]={1,3,12,75,493,3387,23581,164811,1153165,8071131}
In[6]:=Table[b[n],{n,1,10}]
Out[6]={0,2,18,134,954,6710,47034,329366,2305818,16141238}
```

Mathematicaで固有値を求める関数はEigenvalues[ ]である.

```
In[7]:=Eigenvalues[{{3 2}.{2 6}}]
Out[7]={2,7}
In[8]:=Fit[%5,{2^n,7^n},n]
```

Out[8]=0.2　$2^n + 0.0285714$　7^n
ここで，0.0285714　が何か求めなければならない.

```
In[9]:=Table[0.0285714 n,{n,1,10}]
```

Out[9]=$\{\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,0.2,\cdots,\cdots,\cdots\}$
よって，0.0285714　$7 = \frac{1}{5}$,　　$0.0285714 = \frac{1}{35}$　従って,

$$a_n = \frac{1}{5}2^n + \frac{1}{35}7^n$$

```
In[10]:=Fit[%6,{2^n,7^n},n]
```

Out[10]=-0.2　$2^n + 0.0571429$　7^n

$$b_n = -\frac{1}{5}2^n + \frac{2}{35}7^n$$

- **１次分数で表される漸化式**

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{rb_n + s} \tag{5.6}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について
通常は

$$x = \frac{px + q}{rx + s}$$

の解 α, β を用いて数列 $\left\{\dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}\right\}$ を考える. しかしここでは，複素平面（あるいはリーマン球）上の１次分数変換に関連付けて，行列 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の累乗による解法を用いることにする.
１次分数変換は

$$f_A(x) = A < x >= \frac{px + q}{rx + s}$$

と定義するのであった. このとき，

$$A < B < x >>= (AB) < x >$$

$$y = A < x >, detA \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x = A^{-1} < x >$$

が成り立つことは簡単な計算で確かめられる.(注意. $detA = 0 \quad \Longrightarrow \quad A < x >= const.$）
数列に戻る. (5.6) は $x_{n+1} = A < x_n >$ と表される. ここでもし，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化可能であるならば，

$$P^{-1} < x_{n+1} >= (P^{-1}AP) < P^{-1} < x_n >>,$$

$$P^{-1} < x_{n+1} >= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} < P^{-1} < x_n >>$$

従って，

$$P^{-1} < x_n >= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{n-1} < x_1 >,$$

$$x_n = P \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{pmatrix}^{n-1} P^{-1} < x_1 >$$

行列 A の対角化を（可能ならば) 実現するには，その固有値および固有ベクトルがわかればよい. Mathenatica には Eigensystem コマンドがあり，それら両方を求めることができる.

例. $\quad a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 4}$

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について考える.

```
In[1]:=Eigensystem[{{3,2},{1,4}}]
Out[1]:={{2,5},{{-2,1},{1,1}}
```

これらから

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とできる．

$$PA^{n-1}P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 5^{n-1} & -2^n + 2\cdot 5^{n-1} \\ -2^{n-1} + 5^{n-1} & 2^{n-1} + 2\cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

故に

$$a_n = \frac{(2^n + 5^{n-1})\cdot 4 + (-2^n + 2\cdot 5^{n-1})}{(-2^{n-1} + 5^{n-1})\cdot(2^{n-1} + 2\cdot 5^{n-1})} = \cdots \frac{2^{n-1} + 5^{n-1}}{5^{n-1} - 2^{n-2}}$$

5.2 ζ (2n) についての漸化式

４項以上の漸化式は高校では滅多に見ることがない．以下のものは a_n を求めるのに $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 全てを必要とするものである．また、Ubasicが分数計算をサポートしていることを利用できる例でもある．

ζ 関数の正の偶数値における値はEuler 以来計算がなされている．[2]それらについては

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k-1)!}(\pi i)^{2n-2k}\Gamma(2k)\zeta(2k) + \frac{n}{2n+1}(\pi i)^{2n} = 0 \tag{5.7}$$

がなりたつ．　上式を $\zeta(2n)$ について解いたものにすると，

$$\zeta(2n) = -\frac{n}{(2n+1)!}(-\pi^2)^n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-\pi^2)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}\zeta(2k) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5.8}$$

さらに，$\zeta(2n) = a_n\pi^{2n}$ とすると，

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}a_k \tag{5.9}$$

ただし，$a_1 = \frac{1}{6}$

これを用いて $\zeta(2n)$ の値を下から順に計算していくことができる．[3]Ubasicを用いた簡単なプログラムをあげると．

[2]詳しい定義などは省略する．数学III　あるいは大学で扱うのが適当であろう．

[3]普通の本にはBernouille数についての漸化式で数値を求めていく方法が書いてある．この漸化式は別の面から導き出したもので、Bernouille数についての漸化式と同値なのかは知らない．

```
10  'Evaluating  the  values  of  zeta(2n)
20  print=print+"zeta(2n).dat"
30  input "How great n do you want to get for zeta(2n)";L
40  dim A(L):A(1)=1//6
50  for N=2 to L
60      A(N)+((-1)\^ (n-1)*n)//!(2*N+1)
70      for K=1 to N-1
80        A(N)=A(N)-(((-1)\^ (N-K)//!(2*N-2*k+1))*A(K)
90      next K
100 next N
110 for I=1 to L
120   lprint A(I)
130 next I
```

計算結果は,

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\qquad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\qquad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{900},\qquad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\qquad \zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{993555},\cdots$$

索 引