ちょっと変わった距離について … p進距離のお話

平成26年度　きときと数学研修会の話題提供

平成27年2月　富山県教育委員会小中学校課
児童生徒育成係　片山　喜美

距離とは、普通「隔たり」を表すものといったイメージである。

例えば、数5と6の距離は、数の差を考えて1であり、数5と11との距離は6、数5と77との距離は72であるといえるだろう。5からの隔たりを考えると、6に比べ77はかなり離れている。

この普通の距離とちょっと変えて、「素数3が判断基準となる隔たり」を考えてみる。すなわち、「3で割れると親密である、近い」とみなすのである。例えば、5と6の差1は3で割り切れないが、5と11の差6は3で割り切れるから、11の方が6よりも5に近いとみなすのである。5と77の差は $72 = 2^3 \cdot 3^2$ であるから、3で2回割れるので、もっと近いと考える。

このような距離（まだ、距離と呼べるか示していないが）で考えると、次のような不思議な現象が起きる。

性質

- すべての三角形は二等辺三角形になる
- 点 a を中心として半径 r の円を考えると、この円の内部のすべての点がこの円の中心となる

これらは、これまでの常識に反する。（2つ目の円は図にどうやって書くのだろうか？）だから、「3を基準としてどれだけ割り切れるかで近さを測る」ようなものは距離とは言えないのではないか？と思うかもしれない。

そもそも距離とは何だろうか？

1　平面上の距離

平面上の2点 A, B 間の距離とは、2点を結んだ線分の長さとする。計算をするために xy 座標を導入し、 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ とするとき、

定義　2点 A, B の距離を $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ により定義する。

このとき、次のことが成り立つ。

(1) $d(A, B) \geqq 0$ であり、 $d(A, B) = 0 \iff A, B$ が一致

(2) $d(A, B) = d(B, A)$

(3) 3点 A, B, C について、$d(A, B) \leqq d(A, C) + d(C, B)$
（これを三角不等式と呼ぶ）

証明）(1),(2) は簡単。(3) を示す。
$C(c_1,c_2)$, $\quad x_1=c_1-a_1,\ y_1=c_2-a_2,\quad x_2=b_1-c_1,\ y_2=b_2-c_2$ とおく。
$x_1+x_2=b_1-a_1,\ y_1+y_2=b_2-a_2$ となるので、

与式 $\iff \quad \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leqq \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$
両辺とも 0 以上なので、平方して

$$\iff \quad (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2) \leqq x_1^2+y_1^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+x_2^2+y_2^2$$
$$\iff \quad x_1x_2+y_1y_2 \leqq \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

ここで、
$\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2-(x_1x_2+y_1y_2)^2$
$=(x_1^2x_2^2+x_1y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2)-(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2)$
$=(x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2)=(x_1y_2-x_2y_1)^2 \geqq 0$
よって、$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqq |x_1x_2+y_1y_2| \geqq x_1x_2+y_1y_2$
従って (3) が成り立つ。　（証明終）

注意　(1)〜(3) は 3 次元空間でも成り立つ。(1)、(2) の証明は簡単である。(3) の証明は平面と同様に進めていくと、次の不等式を示すことに帰着される。
$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \leqq \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_2^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$
これについては、
$\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right)^2-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2$
$=\cdots\cdots$
$=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2 \geqq 0$
よって、
$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} \geqq |x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2| \geqq x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

一般に、n 次元空間でも (3) については、
$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$
$=\cdots\cdots$
$=\displaystyle\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_ja_i)^2 \geqq 0$

よって、
$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots b_n^2} \geqq |a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n| \geqq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
により成立する。

なお、これは有名な不等式である。

シュワルツの不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

2　距離とは

具体的な対象における何かしらの概念（ここでは平面上の距離）を、それ以外の様々な対象に当てはめていくということは、数学でよく行なわれることである。それを「抽象化」というのかもしれない。考える世界を広げていくことになる。

距離についても抽象化を行う。すなわち、上で示した性質 (1)〜(3) を満たすものを距離とするのである。原因と結果が逆になる感じである。

定義　集合 X の任意の 2 つの元 A, B に対して、A, B の間の距離 $d(A, B)$ とは、次の 3 つの性質を満たすものであると定義する。

(1) $d(A, B) \geqq 0$ であり、 $d(A, B) = 0 \iff A = B$

(2) $d(A, B) = d(B, A)$

(3) 3 点 A, B, C について、$d(A, B) \leqq d(A, C) + d(C, B)$
（これを三角不等式と呼ぶ。「三角形の 2 辺の長さの和は、残りの 1 辺の長さより大きい。」という性質から来ている。）

さて、普通の距離に密接に関わる概念として「絶対値」がある。平面上の点 $A(a_1, a_2)$ については、その絶対値を $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ とする。すると、距離は絶対値を用いて、
$d(A, B) = |B - A| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
と表される。数学的な発展としては、距離が先にあり、絶対値は「原点 O との距離」として距離をもとに考えたのかもしれない。いずれ、絶対値は次の 3 つの性質を満たす。

(1) $|A| \geqq 0$ であり、 $|A| = 0 \iff A = O$

(2) a が実数や複素数のとき、$|aA| = |a| \cdot |A|$

(3) $|A + B| \leqq |A| + |B|$

ここでまた、歴史的な順番と逆かもしれないが、「まず絶対値があり、それを用いて距離を定義できる」という風に考える。様々なものに適用するために、「絶対値」にあたるものを用語を少し変えて「ノルム（norm）」と呼ぶことにして、記号も $||\quad||$ などとし、次のように定義する。

定義　集合 X の任意の 2 つの元 x, y に対して、その和 $x + y$ 及び差 $x - y$ が定義され、それらがやはり集合 X の元となるものとする。また、集合 X の元 x に対して、実数 a（あるいは複素数 a ）を掛けたもの ax がやはり集合 X の元であるものとする。（集合 X の任意の 2 つの元 x, y の積 xy もまた集合 X の元であるとすることも考えることがある。）

このとき集合 X 上のノルム $||\cdot||$ とは、次の 3 つの性質を満たすものであるとする。

(1) $||A|| \geqq 0$ であり、 $||x|| = 0 \iff x = 0$

(2) a が実数や複素数のとき、$||aA|| = |a| \cdot ||A||$　（$||x \cdot y|| = ||x|| \cdot ||y||$）

(3) $||A+B|| \leqq ||A|| + ||B||$

定義 ノルムから導かれる距離
$||\cdot||$ がノルムであるとき、 $d(A,B) = ||B-A||$ をノルムから導かれる距離であるという。

課題　ノルムの定義の (1)〜(3) から距離の定義の (1)〜(3) が満たされることを証明せよ。

3　距離の例

例 1． n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ において、$A(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、絶対値 (ノルム) を $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ として、普通の慣れ親しんだ距離が得られる。

例 2． $\mathbb{R}^2$ (平面) において、$A(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $||A|| = max\{|x|, |y|\}$ とくと、これはノルムになる。これを max ノルムという。
証明)

(1) $||A|| \geqq 0$ は明らか。
$||A|| = 0 \Longleftrightarrow max\{|x|, |y|\} = 0 \Longleftrightarrow |x| = 0$ かつ $|y| = 0 \Longleftrightarrow A = O$

(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $aA = (ax, ay)$ とする。
$||aA|| = max\{|ax|, |ay|\} = |a| \cdot max\{|x|, |y|\} = |a| \cdot ||A||$

(3) $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$ とし、 $A+B = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ とする。（高校では、こういう書き方をすると怒られるかもしれない）
$||A+B|| = max\{|x_1+x_2|, |y_1+y_2|\} \leqq max\{|x_1|+|x_2|, |y_1|+|y_2|\}$
ここで、$|x_1|+|x_2| \leqq max\{|x_1|, |y_1|\} + max\{|x_2|, |y_2|\}$
$|y_1|+|y_2| \leqq max\{|x_1|, |y_1|\} + max\{|x_2|, |y_2|\}$ より、
$max\{|x_1|+|x_2|, |y_1+|y_2|\} \leqq max\{|x_1|+|x_2|, |y_1|+|y_2|\}$
よって、 $||A+B|| \leqq ||A|| + ||B||$

（証明終わり）

例 3． $\mathbb{R}^2$ (平面) において、$A(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、$||A||_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$　$(p \geqq 1)$ とおくと、これはノルムとなる。
証明）
(1)、(2) は明らか。
(3) については次の不等式による。（ここではその証明を略する）

ミンコフスキーの不等式

$p \geqq 1, x_1, x_2, \cdots, x_n \geqq 0$ のとき、

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \leqq \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right\}^{1/p}$$

例４．$\mathbb{R}^2$ (平面) において、有界閉領域 D が「2 点 A, B が領域 D に含まれるとき、線分 AB 上のすべての点が領域 D の点である。」ときに、D を凸体と呼ぶ。
D が原点 O を内部に含む凸体であるとする。このとき、$A \neq O$ について、次のように定める。

- 原点 O と点 A を結び、A より向こう側にはずっと伸ばした半直線を考える。
- この半直線と領域 D の境界はただ 1 つの共有点 A' を持つ。（課題　これを証明せよ）
- $||A|| = \dfrac{|OA|}{|OA'|}$ と定める。（原点から A までが、原点から A' までの何倍になるか）

また、 $||O|| = 0$ と定める。このとき、 $||\cdot||$ はノルムになる。
証明）(1)、(2) は明らか。
(3) について、まず、 $A, B \in D \Longleftrightarrow ||A|| \leqq 1, ||B|| \leqq 1$ に注意する。（D の点であることは、原点と結んで境界よりも手前であるということ）
$A, B \neq O$ のとき、$A' = \dfrac{1}{||A||}A,\ B' = \dfrac{1}{||B||}B$ とおく。
$||A'|| = \dfrac{1}{||A||}||A|| = 1, ||B'|| = \dfrac{1}{||B||}||B|| = 1$ より、 A', B' は D の点である。（境界上の点である）
D が凸体であることから、 $A'B'$ を　$||B|| : ||A||$ の比に内分する点 $\dfrac{||A||A' + ||B||B'}{||B|| + ||A||}$ もまた D の点である。この点は、 $\dfrac{A+B}{||B|| + ||A||}$ であるから、この点について $||\cdot||$ を考えて、$\left|\left|\dfrac{A+B}{||A|| + ||B||}\right|\right| \leqq 1,\quad \dfrac{||A+B||}{||A|| + ||B||} \leqq 1$。　従って、 $||A+B|| \leqq ||A|| + ||B||$
なお、 $A = O$ または $B = O$ のときは、明らかに成り立つ。（証明終）

注意 1．
　$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ とすると、普通慣れ親しんでいる絶対値と距離が得られる。

注意 2．
　$D = \{(x, y) \mid |x| \leqq 1, |y| \leqq 1\}$ とすると、max ノルムおよび、それから導かれる距離が得られる。

＜参考＞
原点を含む有界閉凸体から定義するノルム $||\cdot||$ に対して、関数 $f(A) = ||A||$ とおくと、次の性質を持つ。

(1) $f(A) \geqq 0$　であり、$f(A) = 0 \Longleftrightarrow A = O$

(2) $a \in \mathbb{R},\ a \geqq 0 \Longrightarrow f(aA) = af(A)$

(3) $f(A+B) \leqq f(A) + f(B)$

そして、$D = \{A \in \mathbb{R}^2 | f(a) \leqq 1\}$ となる。上の (1)～(3) を満たす関数 f をゲージ関数という。逆に、ゲージ関数 f をもとに、 $D = \{A \in \mathbb{R}^2 | f(a) \leqq 1\}$　とおくと、D は原点を

内部に含む有界閉凸体となることが示される。以下の本にいろいろなことが書いてある。

C.L.Siegel 著「Lectures on Geometry of Numbers」(Springer-Verlag)

4　有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の p 進距離

冒頭に述べたような、「2 つの数の差が素数 p で割り切れる度合いで、2 つの数の距離の近さを考える」ことについて考える。

4.1　p 進ノルムと p 進距離

定義　$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\cdots\}$ を任意の素数とする。

　このとき、整数 $a\,(a \neq 0)$ が素数 p でどれだけ割り切れるか (p-ordinal of a) を $ord_p a$ で表す。$ord_p a = max\{m \in \mathbb{Z} \,|\, a \equiv 0 \pmod{p}\}$
0 については、$ord_p 0 = \infty$ と定義する。
0 は、$p, p^2, p^3, \cdots$ のすべてで割り切れる。無限に割り切れると考えるので ∞ とするのである。

例　$ord_5 35 = 1,\quad ord_5 250 = ord_5 2 \cdot 5^3 = 3,\quad ord_2 96 = ord_2 2^5 \cdot 3 = 5,\quad ord_2 97 = 0$

性質　$ord_p(a_1 a_2) = ord_p a_1 + ord_p a_2$ が成り立つ。（対数と似ている）

定義 有理数 $x = \dfrac{a}{b}\,(a, b, \in \mathbb{Z},\, b \neq 0)$ について、$ord_p x = ord_p a - ord_p b$ と定義する。

例　$ord_5 \dfrac{15}{2} = ord_5 15 - ord_5 2 = 1 - 0 = 1,\quad ord_5 \dfrac{22}{75} = ord_5 22 - ord_5 3 \cdot 5^2 = 0 - 2 = -2$

注意　$x = \dfrac{a}{b}$ は既約分数になっていなくてもかまわない。

例えば、$\dfrac{15}{2} = \dfrac{1125}{150}$ であり、

$$ord_5 \frac{1125}{150} = ord_5 1125 - ord_5 150 = ord_5 3^2 \cdot 5^3 - ord_5 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 3 - 2 = 1 = ord_5 \frac{15}{2}$$

既約分数でないときは、分母、分子に共通な因数があるのだが、ord の計算のときに、同じ分だけ差し引きとなり、消えるのである。

定義（p 進ノルム）
p を素数とするとき、$x \in \mathbb{Q}$ について、$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$
と定める。

命題　$|\cdot|_p$ はノルムである。
証明）

(1) 明らか

(2) $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$　(既約分数で表されている) とする。$x, y \neq 0$ のとき、
$ord_p(xy) = ord_P \dfrac{ac}{bd} = ord_p ac - ord_p bd = ord_p ac - ord_p bd$
$= ord_p a + ord_p c - ord_p b - ord_p d$
従って、$|x \cdot y|_p = p^{-ord_p a - ord_p c + ord_p b + ord_p d} = p^{-(ord_p a - ord_p b)} \cdot p^{-(ord_p c - ord_p d)} = |x|_p \cdot |y|_p$

(3) $|x+y|_p \leqq |x|_p + |y|_p$ を示す。

- $x = 0$ のとき、両辺とも $|y|_p$ となり、不等式は成立。 $y = 0$ のときも同様。
- $x + y = 0$ のとき、左辺 $= 0$ 、右辺 $\geqq 0$ であるから成立する。
- $x \neq 0, y \neq 0, x + y \neq 0$ のとき、
  $x + y = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$
  $ord_p(x + y) = ord_p(ad + bc) - ord_p b - ord_p d$
  ここで、ad, bc ともに p^m で割り切れるとき、$ad + bc$ も p^m で割り切れるから、
  $ord_p(x + y) \geqq min\{ord_p ad, ord_p bc\} - ord_p b - ord_p d$
  - $min\{ord_p ad, ord_p bc\} = ord_p ad$ のとき、
    $ord_p(x+y) \geqq ord_p ad - ord_p b - ord_p d = ord_p a + ord_p d - ord_p b - ord_p d = ord_p a - ord_p b = ord_p x$
  - $min\{ord_p ad, ord_p bc\} = ord_p bc$ のとき、
    $ord_p(x+y) \geqq ord_p bc - ord_p b - ord_p d = ord_p b + ord_p c - ord_p b - ord_p d = ord_p c - ord_p d = ord_p y$

  従って、$ord_p(x + y) \geqq min\{ord_p x, ord_p y\}$
  $|x + y|_p \leqq max\{|x|_p, |y|_p\} \leqq |x|_p + |y|_p$

（証明終）

4.2　非アルキメデス距離

上の命題の性質 (3) の証明では、三角不等式よりも強い条件が満たされることを示している。すなわち、$|x + y|_p \leqq max\{|x|_p, |y|_p\}$ が成り立っている。この性質が、重要な役割を果たす。

定義　（非アルキメデス-ノルム　, non-Archimedean norm）

- ノルム $||\cdot||$ が非アルキメデスである $\Longleftrightarrow^\forall x, y$ について $||x + y|| \leqq max(||x||, ||y||)$
- 距離 $d(\cdot,\cdot)$ が非アルキメデスである $\Longleftrightarrow^\forall x, y, z$ について $d(x, y) \leqq max(d(x, z)d(z, y))$

と定義する。非アルキメデスではないとき、アルキメデスであるという。

性質

- p 進ノルム（距離）は非アルキメデスである。
- 絶対値及びそれから導かれる「普通の距離」はアルキメデスである。

命題　距離が非アルキメデスなノルムから導かれるときには、三角形はすべて2等辺三角形になる。

証明）原点 O, $A(x)$, $B(y)$ を3つの頂点とする三角形 OAB について考える。このときの3辺の長さは、$||x||, ||y||, ||x-y||$ である。
非アルキメデスであることから、$||x-y|| \leqq max(||x||, ||y||)$

- $||x|| = ||y||$ のとき、 $OA = OB$ の2等辺
- $||x|| < ||y||$ のとき、上式より、 $||x-y|| < ||y||$
  一方、$||y|| = ||x-(x-y)|| \leqq max(||x||, ||x-y||)$ で、 $||y|| \leqq ||x||$ は仮定に反するから、 $||y|| \leqq ||x-y||$。従って、 $||y|| = ||x-y||$ となり、$OB = AB$ の2等辺
- $||x|| > ||y||$ のとき、同様に、$OA = AB$ の2等辺

（証明終わり）

注意　常に「2つの等しい辺の長さ＞残りの辺の長さ」が成り立つ。

例. $O(0)$, $A(12)$, $B(45)$ を3進距離で考えると、$OA = |12|_3 = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$,　$OB = |45|_3 = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$,　$AB = |45-12|_3 = |33|_3 = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$　よって、$OA = AB$

命題　非アルキメデスのとき、点 $A(a)$ を中心とする半径 r の円 C の内部の点は、すべて円 C の中心となる。
証明）$D_1 = \{||x-a|| < r\}$, $D_2 = \{||x-b|| < r\}$　$b \in D_1$ とする。

- ${}^\forall x \in D_2$ について、
  $||x-a|| = ||(x-b)+(b-a)|| \leqq max\{||x-b||, ||b-a||\} \leqq max\{r, r\} = r$
  従って、$x \in D_1$。　よって、 $D_2 \subseteq D_1$
- ${}^\forall x \in D_1$ について、
  $||x-b|| = ||(x-a)+(a-b)|| \leqq max\{||x-a||, ||b-a||\} \leqq max\{r, r\} = r$
  従って、$x \in D_2$。　よって、 $D_1 \subseteq D_2$

以上により、 $D_1 = D_2$ （証明終わり）

p進距離で考えると、これまで常識だと思っていたことと違う現象 が起きる。違和感があり、なかなか馴染めない。ただし、普通に考えていた距離で成り立つ性質と何もかも違うかというとそうではない。様々なことについて、何が同じで何が違うのか、比較しながら調べていくことになる。

数を有理数体 $\mathbb{Q}$ から実数体 $\mathbb{R}$ に拡大するのはどういうことかというと、有理数からなる収束数列（Cauchy 列）を考えて、その極限には有理数でないものがあるが、それらを有理数体 $\mathbb{Q}$ に補うのであるという考え方ができる。歴史的な流れはそうではないかもしれないが、そう考えても同じことになる。そして、その収束というのは、絶対値を用いて

考えているのだから、それをｐ進ノルムに替えて、どのような状況が起こるのかということを考える。

さらに、実数体 $\mathbb{R}$ には方程式 $x^2+1=0$ の解が存在しないから、それを補うと複素数体 $\mathbb{C}$ が得られるということも、$\mathbb{Q}$ をｐ進コーシー列の極限を補うことで拡大した数体 $\mathbb{Q}_p$ に対して同様に考える。そして、いろいろな関数やその微分等も考えていく。

そうしたことについては、以下の本を参照に。（ここまでの内容もこの本の最初の部分によるものである。）

Neal Koblitz 著「p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions」
(Springer, Graduate Texts in Mathmatics 58)