ある種のピタゴラス数と２次形式 ••• 課題研究から

富山県立砺波高等学校　　片山　喜美

１．漸化式の発見

平成９年度　砺波高校理数科の課題研究の数学第３班ではピタゴラス数，すなわち $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=z^2\quad x,y,z\in\mathbb{N}\}$ を研究した．その中で $|x-y|=1$ を満たすピタゴラス数については，大変珍しい．$x^2+y^2=z^2,\quad x,y,z\in\mathbb{N},\quad y=x+1$ を満たすピタゴラス数について，簡単なプログラムを用いて $x\leq 100000$ の範囲で調べてみると

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)=\quad &(3,4,5), &&(20,21,29), &&(119,120,169),\\
&(696,697,985), &&(4059,4060,5741), &&(23660,23661,33461)
\end{aligned}
$$

の 6 個しか見つからない．これらの数は急激に大きくなることもあり，どのような性質を持つのかを言い当てるのは難しいのではないかと思われた．しかしながら，班員の一人が，次のような事実を発見した．

定理 1 $x^2+y^2=z^2,\quad |x-y|=1$ を満たすピタゴラス数で x を奇数，y を偶数とするときの列を $\{(x_n,y_n,z_n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ とする．このとき，

$$x_n=a_na_{n+1},\qquad a_1=1,\,a_2=3,\quad a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

が成り立つ．

これを証明することは簡単ではなかった。課題研究発表会の際には，班にとっての未解決の課題であると報告した．

２．２次形式への帰着と問題の解決

名古屋大学の北岡良之教授に，問題を２次形式 X^2-2Y^2 に帰着すると解決するのではないかというアドバイスいただいて考えたところうまく解決した．
$x^2+y^2=z^2,\quad |x-y|=1,\quad x,y,z\in\mathbb{N}$ を２次形式 X^2-2Y^2 に帰着するには２通りの方法がある．
(方法１)　$x^2+y^2=z^2,\quad (x,y,z\in\mathbb{N}\quad x,y,z$ は互いに素$)$　を満たす原始的ピタゴラス数についての媒介変数表示

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2$$

$$m^2-n^2=2mn+1,\qquad m^2-2mn+n^2-2n^2=1,\qquad (m-n)^2-2n^2=1$$

$X=m-n,\quad Y=n$ とおいて $X^2-2Y^2=1$ を得る．
$x=y-1$ のときは同様にして $X^2-2Y^2=-1$ を得る．

(方法２)　$x^2+y^2=z^2$ に $y=x+1$ を代入すると

$$2x^2+2x+1=z^2,\qquad 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=z^2,\qquad (2x+1)^2-2z^2=-1$$

$X=2x+1,\quad Y=z$ とおくと $X^2-2Y^2=-1$ を得る．
方法１が北岡先生からのアドバイスのもので，それについて考察をしているうちに方法２の方が直接的ではないかと考えた．ただし，生徒の発見した漸化式につながったのは方法１のものである．
方法２からは別の漸化式が得られる．

定理 2 $x^2+y^2=z^2, y=x+1$ を満たすピタゴラス数の列を $\{(x_n,y_n,z_n)\}$ とすると，

$$x_0=0,\, z_0=1, \quad x_{n+1}=3x_n+2z_n+1,\, z_{n+1}=4x_n+3z_n+2$$

２次形式の理論から $X^2-2Y^2=\pm1$ の解については以下が成り立つ．

$$X_1=3,\, Y_1=2, \quad X_{n+1}=X_n+2Y_n,\, Y_{n+1}=X_n+Y_n \tag{1}$$

これを用いると定理１，２が正しいことが証明される．

３．発展　$x^2+y^2=z^2,\ y=x+k$ を満たすピタゴラス数について

さて，次の課題として $x^2+y^2=z^2,\ y=x+k$ を満たすピタゴラス数を考える．k が偶数のときは，x と y は同じパリティーとなる．したがって k は奇数とする．
$y=x+k$ のときは，２次形式 $X^2-2Y^2=-k^2$ に帰着される．平方剰余の相互法則・第２補充則に従い２次形式の表現数を計算すると $k=p \quad (p\equiv 3,5 \pmod 8)$ のときは $y=x+1$ の三角形を p 倍したものしか得られない．$k=p \quad (p\equiv 1,7 \pmod 8)$ のときは表現数は３である．そのうち１つは非原始的なもの（$y=x+1$ を p 倍したもの）である．あと２つは非原始的なものであろうか？もっとも簡単な $p=7$ について考えてみる．

定理 3 $x^2+y^2=z^2, \quad y=x+7$ を満たすピタゴラス数 (x,y,z) は
$(x_1,y_1,z_1)=(5,12,13), \qquad (x_2,y_2,z_2)=(8,15,17)$

$$\begin{cases} x_{n+2}=3x_n+4y_n \\ y_{n+2}=2x_n+3y_n \end{cases}$$

による２つの原始的な列と $y=x+1$ を満たすものを７倍した非原始的な列をもつ．

その他の素数 $p\equiv 1,7 \pmod 8$ についての場合についても２つの非原始的な列が 必ずできるかはまだ調べていない．

また，合成数については，$k={p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_l}^{e_l}$ と素因数分解されているとき，２次形式 $X^2-Y^2=-k^2$ の表現数は，

$$R(k^2)=\sum_{m|k^2}\chi_8(m)=\sum_{0\le m_j\le e_j}\chi_8({p_1}^{m_1}{p_2}^{m_2}\cdots{p_l}^{m_l})$$

$$=\sum_{0\le m_j\le e_j}\chi_8({p_1}^{m_1})\chi_8({p_2}^{m_2})\cdots\chi_8({p_l}^{m_l})=\prod_{j=1}^{l}\sum_{m_j=0}^{e_j}\chi_8({p_j}^{m_j})$$

したがって

$$R(k^2)=\prod_{p_j\equiv 1,7 \pmod 8}(2e_j+1)$$

具体的な計算は今後の課題である．

生徒が漸化式を発見したことは驚きであった．しばらくはその正しさを証明できなかったが，幸運にもアドバイスをいただいたおかげで解決することができた．２次形式の一般論をこの様な身近な問題に適用できたことはうれしい体験であった．今回も課題研究はいい勉強の機会となったと思う．