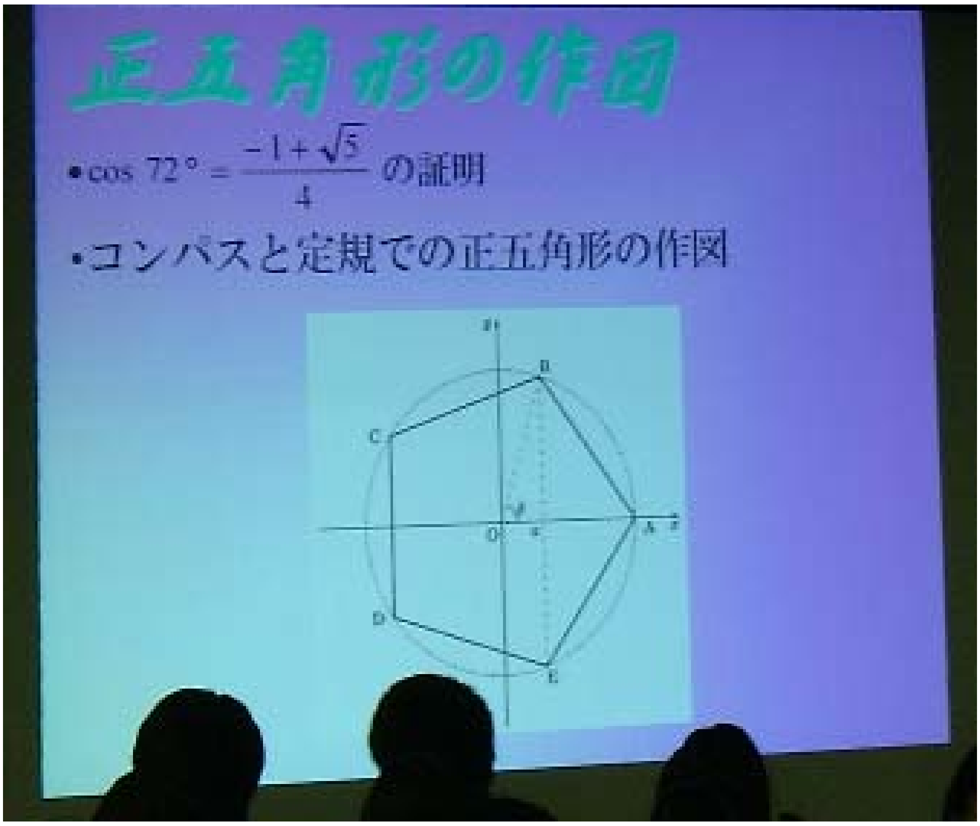
「数学の課題研究について」



富山県立砺波高等学校　教諭　片　山　喜　美

e-mail　ja9nfo@p1.coralnet.or.jp

katayama-kiyoshi@tym.ed.jp

要旨

１．　本校の概要と理数科について

２．　本校の課題研究への取り組み

３．　これまでの数学の課題研究について

a)　本校のこれまでの数学の課題研究題目一覧

b)レポートを何で書くか？　―――　数式を含む文章の打ち込みについて

i)　MSーDOS の時代

ii)　MSーWord

iii)　TeX

c)　課題研究でとるべき方針とは

４．　課題研究と担当教員の学習・・・私の体験から

a)　$\sqrt{n}$ 連分数展開の公式

b)ユークリッドの互除法が終了するまでの計算回数について

c)ある種のピタゴラス数を与える漸化式の生徒による発見

・・・２次形式の応用による証明

d)正多角形の作図問題に関する基礎知識

e)C60 フラーレンからの類推による C24 の形状

・・・数学コンテストの問題より

５．おわりに

１． 本校の概要と理数科について

（１）概要

明治４２年４月８日第１回入学式。現在各学年普通科４学級、理数科１学級、全校生徒６００名。普通科は２年次に文系、理系各２クラスずつに分かれる。富山県南西部の砺波市に立地。近くにはチューリップ公園があり、ゴールデンウィークにはたくさんの観光客でにぎわう。教育目標は「道義為之根」、「質実剛健」、「自彊不息」、「進取而敢為」。多くの生徒が国公立大学への進学を希望、部活動との両立に努力している。ラグビー部は全国大会に 11 度出場。昨年も全国大会で 2 回戦進出。

（２）理数科について

昭和４４年理数科設置。幅広い教養を身につけ、科学的に考察することのできる創造性豊かな人間の育成を目指す。特別な活動として、1 年次の臨海実習、2 年次のセンター実習、課題研究発表など。臨海実習では、能登半島にある金沢大学理学部付属の臨海実験所に 2 泊 3 日で出かけ、磯採集、ムラサキウニの初期発生の実験、プランクトンの観察等を行う。推薦入試により定員の 25%（10 名）を募集。推薦入試導入によりクラスに活気が生まれたとの評価。

なお、本校のホームページは http://www1.coralnet.or.jp/tonamihs

２． 本校の課題研究への取り組み

数学・物理・化学・生物から１テーマを選択し、数名のグループで普段の授業内容を超えた課題を深く探求する。研究を通して科学的な見方や考え方を養い、科学知識の向上と深化をめざす。

2 年次 9 月に希望調査、班分け。数学２班、物理２班、化学２班、生物２班の編成を標準とするが、年度によっては多少の増減がある。２学期中間考査までは、週１時間（水曜６限の理科の時間を提供）、その後は週２時間（水曜６、７限）。冬期休業中や３学期は毎日取り組む場合もある。１月末ないし２月はじめに課題研究発表会。第１日目は校内発表で、１年理数科、２年理系クラスを招待。第２日目は校外発表とし、近隣の中学校の先生を招待。

理数科卒業生が課題研究について、以下のような思いを書いている。「理数科の課題研究は普通科には見られないもので、研究題目の選定からレポートの作成、研究発表まで全てを自分たちで行います。大学受験のための勉強に偏りがちな高校生活においては、ほとんど経験することのない『実践する』という貴重な経験が得られます。私は課題研究をはじめ理数科での勉学を通じて科学的な視点から物事を見つめることができるようになったと思います。そして、これらの経験がこれからの大学での学問研究にむかう大きな自信となっています。」

３． これまでの数学の課題研究について

a)本校のこれまでの数学の課題研究題目一覧

昭和６３年度
- 円周率の研究
- 実数係数の三次方程式の解法について

平成元年度
- マルコフ過程
- ガウス平面

平成２年度
- ケプラーの法則と万有引力
- 対数方眼紙を使って

平成３年度
- フェルマーの大定理

平成４年度
- 魔法陣の研究
- 数の性質（最大公約数・互除法・連分数）

平成５年度
- ３次、４次方程式の解法
- 接線の引けない曲線

平成６年度

- ｎ次正方行列の研究
- ３ＤＣＧ（３次元コンピュータ・グラフィックス）の基礎

平成７年度

- ユークリッド幾何　ーﾄﾚﾐｰの定理、ｼﾑｿﾝ線、九点円などー
- 複素世界のニュートン法

平成８年度

- 非ユークリッド幾何学について
- 作図不可能問題について

平成９年度

- 三角ビリヤード
- 魔法陣
- ピタゴラスの三角形

平成１０年度

- 行列（一次変換）について
- 複素数平面上での円・直線の図形変換

平成１１年度

- フラクタル図形とその次元について
- 方程式の代数的解法

平成１２年度

- 正多角形と正多面体
- 微分方程式
- レイトレーシングによる３ＤＣＧ

b) レポートを何で書くか？（書いたか？）　———　数式を含む文章の打ち込みについて

ｉ)　MS-DOS の時代

Windows が出てくる前の MS－DOS の時代には、PC－98 シリーズと一太郎がゴールデンコンビとして一世を風靡した。しかし、一太郎で数式を打ち込むには色々な工夫を要し、記号を駆使したり、上付き、下付き１／４文字を使ったりしてなんとかやっていた。P1EXE（後に ARUGA）というワープロソフトは数式を打ち込むには一太郎に比べて少し便利であったと思う。県教委へ提出する報告書に P1EXE が指定されたこともあった。

その当時 Nifty で見つけたフリーウェア（確かな記憶はないが）が QNOTE であった。これはワープロソフトに比べてかなり使えるなという印象であった。平成４年の課題研究のまとめはこれを用いて作成した。TeX への変換機能も付属していたと思うが、一度も変換せずに終わった。

ｉｉ)　MS－Word

Windows の時代を迎えると、一太郎ばかりではなく Word も普及した。私の勤めている職場周辺を見る限り、一般の文章は DOS の時代からの継続で一太郎をよく使っている。しかし一太郎の数式作成機能はどうも使い勝手が悪いようで、何人かの同僚の先生がチャレンジしたものの、しばらく後には放棄されていた。Word の数式エディタはそこそこ使いやすく、WYSWYG の方式は初心者には受け入れやすいため、数式を使う場合は Word を使用するという人も多い。生徒に使用させる場合も、ほんの少し教えるだけで、後は自力でスイスイ書いてしまう。また、昨今、レポートに Excel から数表やグラフなどを挿入したり、課題研究の発表会の時には多くの班が PowerPoint を用いたりするので、それらのソフトと連携が容易という面でも Word が便利だと評価されている。

ただし、個人的には使いづらい印象がある。数式と普通のテキストを混在させるため、数式エディタと通常のテキスト編集を、また、Keyboard と Mouse を頻繁に行ったり来たりするのが煩わしい。その上見栄えがあまりよくない。さらに作業を進めるうちにしばしばエラーがでて憂鬱になる。この報告書も Word で作成しているが、苦労が多い。

ｉｉｉ)　TeX

QNOTE で報告書をまとめた時の生徒が大学へ進学し、夏休みにＭＳ－ＤＯＳ上で動作する TeX を持ってきた。「便利ですから使ってください」といわれたのだが、試してみることができないまま時間が過ぎた。

TeX が身近になったのは、TeX for Windows が ASCII から（ソフトウェアではなく図書として）出版されて

からであった。統合環境で初心者にも扱い易く、参考書もそこそこ出始めて、きれいに数式が出力されることに喜んだ。当時はまだ Windows3.1 から Windows95 へといった時代であった。本校に生徒用として配置された 20 台の PC は全て HDD なし、FDD からの起動の DOS マシンであり、教師用の１台だけ Windows95 を扱うことが出来た。そのような状況では生徒数人に Windows+ワープロソフトを使用させることは困難で、そのため TeX を用いて報告書を作成した。起動可能なフロッピーにエディタを入れたものを１枚ずつ渡す。簡単に TeX の文法を教えた後は、打ち込む内容を分割して、参考書を置いて生徒にソースを打ち込ませる。頃合をみてソースを集めて合体し、Windows マシンへ移行して、TeX をかけ、相次ぐエラーをひとつずつ修正し、また生徒に返却して続きを打ち込ませるという過程を完成まで繰り返した。TeX であるがため、フロッピー1 枚でも文章のソースを収めるには有り余ることや、非力なマシンでも同時進行で生徒に作業させることができた。仕上がりはきれいで、うまい方法だと思った。

その後、pLaTeX2e と秀丸＋マクロ、さらに TeX 専用の便利な Editor である LabEditor を使うようになり、日頃のテスト作成でも効率的な作業ができるようになった。グラフを作成し TeX に挿入できる WinTpic や便利なマクロ集 emath なども利用できる。いくつかの報告書を TeX で打ち込んだが、目次や索引も処理できて便利であった。emath シリーズにはグラフなども含め沢山の機能があり、もう少し時間をみつけて技術を向上したいものだと考えている。

理系に進む生徒に TeX を教えることは、大学進学後にも役立つことだと思うのだが、最近の大学での文書作成環境の情報は正確にはつかんでいない。同僚の先生にも機会をみては TeX を勧めているのだが、思ったほど普及できずにいる。

c) 課題研究でとるべき研究の方針とは

数学の話題の中から課題研究の題材を見つけるのは容易ではない。生徒自身が疑問を持つことが理想的であるが、日頃の数学の学習を普通に行っている限り、なかなかいい題材は見つからない。指導に当たる我々も常に題材になりそうなものに注意を払い、授業では折に触れて関連事項として紹介したり、休日の課題として与えたり、何かしらの種を蒔いておくことも必要ではないだろうか。

数学では講究型の課題研究になってしまうことも多い。既に完成した理論を読解し、それに基づいていくつかの例を計算してみたり、コンピュータ・グラフィックスを用いて何か描いてみるような形式である。そのような課題研究も大きな意味を持つだろう。しかし、いろいろな数値計算などから試行錯誤を繰り返し、考察を深めていく探求・発見型の研究を目指したいものだと考える。「ガウスが進んだ道は即ち数学の進む道である。その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。それは凡ての実質的なる学問に於いて必要なる条件であらねばならない。数学が演繹的であるというが、それは既成数学の修業にのみ通用するのである。自然科学に於いても一つの学説が出来てしまえば、その学説に基づいて演繹をする。しかし論理は当たり前なのだから、演繹のみから新しい物は何も出てこないのが当たり前であろう。若しも学問が演繹のみにたよるならば、その学問は小さな環の上を永遠に周期的に廻転する外はないであろう。我々は空虚なる一般論に捉われないで、帰納の一途に精進すべきではあるまいか。」（高木貞治　「近世数学史談」より）とあるように、いろいろな具体例を沢山考えてみて、そこにある何かしらの真理を抽出するような態度で課題研究を行えたらと思う。

あるとき県が主催する「教育問題懇談会」で、小学校の算数を担当されている指導主事が、「１＋５をしっかり教えれば、あとは０．１＋０．５も１／７＋５／７もみんなわかってしまう。それが基礎・基本だ。」とおっしゃった。唖然とした。そのような方針で小・中学校と育ってくるのであれば、そして簡単な物だけ、楽しい物だけしかやらないという間違った「精選・厳選」を行ったとしたら、たとえ「目が輝いた」と短期的にはいい効果が表れたとしても、将来理系の分野で創造的な仕事をなす人材を育成することはできないのではないかと心配である。理科離れといわれる現状を改善することは、おしなべて教える内容を３割削減する新しい教育課程の下ではますます難しくなるのではないかと危惧される。先日も国連から日本の科学教育について憂うべき報告がなされたとの報道があった。大学に勤めている知り合いから学力低下の状況を口説かれるばかりではなく、企業で技術開発に当たっている人たちからも憂慮するメールが届いている。

今後、新課程を実施するにあたって課題研究がどのような位置づけとなるのか、自分には不明な部分が多いが、出来る限り数学における帰納的な体験を生徒に与えられるように努力したいものだと思う。

５．　研究と担当教員の学習・・・私の体験から

課題研究を担当することにより、我々教員にとっても大きな勉強となることがある。研究の題材を求めること。かつて学生時代に学んだことをもう一度振り返ることや、さらには学生時代には理解仕切れていなかった

ことを学んだり、学んでいなかった分野にも挑戦してみること。また、研究を進めるうちには、疑問が生じて文献を調べたり、自力で解かなければならないこと。ささやかではあるが何かを発見することもある。（むろん新発見ではないだろうが）

　このような体験は、教員にとっても有益で楽しいものであると思う。生徒の意外な発見に驚かされ、自分も発憤するようなこともある。以下にいくつかの事例を紹介する。

a） $\sqrt{n}$ 連分数展開の公式

　平成４年度に現勤務校に赴任し、理数科２年のクラス担任となった。そしてはじめて課題研究を担当した。それまでの数学の課題研究は数学書の輪読形式が多かったように思えたので、なるべく具体的な計算などをコンピュータも用いて沢山行う内容に取り組んでみようと生徒と相談した。「数の性質」という題目で、最大公約数、互除法とできるところから取り組んでいき、有理数および $\sqrt{n}$ の連分数展開まで進んだ。

　$\sqrt{n}$ の循環連分数展開については、 $n=1,\cdots,100$ について行い、数表を作成することを目標とした。簡単にプログラムできるだろうという当初の予想に反し、困難を克服するためには計算式を工夫することが必要であった。そして工夫したその式が正しいことを証明することには私自身しばらくの考察が必要であった。以下にそのときの経緯を述べる。

アプローチ１.

$$q_1=\lfloor\sqrt{n}\rfloor \quad , \quad r_1=\sqrt{n}-q_1 \quad , \qquad q_{k+1}=\left[\frac{1}{r_k}\right] \quad , \quad r_{k+1}=\frac{1}{r_k}-q_{k+1}$$

により数列 $\{q_k\}$, $\{r_k\}$ を順次定めていけば

$$\sqrt{n}=[q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k,\cdots]$$

　と無限連分数展開ができる。そしてうまく循環節を検出してやればと考えた。しかしながら、上記の式をそのまま用いた単純なプログラムでは、割と小さな k でもおかしなことが生じ、うまく計算できない。原因はコンピュータ内部での $\sqrt{n}$ の値の誤差、さらに無理数 $\dfrac{1}{r_k}$ を計算するときの誤差があっという間に積もってしまうことが考えられた。

アプローチ２.

そこで、$\sqrt{n}$ の簡単な性質を用いて、極力整数の計算だけに持ち込む方法を工夫することにした。

有理化を用いる。

$$r_k=\frac{b_k\sqrt{n}-c_k}{a_k} \qquad (a_k>0, a_k, b_k, c_k\in Z)$$

と表す。

$r_1=\sqrt{n}-a_1$ 　より、　$a_1=1, b_1=1, c_1=q_1$

　k 番目まで定まったとすると、

$$q_{k+1}=\left[\frac{1}{r_k}\right]=\left[\frac{a_k}{b_k\sqrt{n}-c_k}\right]=\left[\frac{a_kb_k\sqrt{n}+a_kc_k}{{b_k}^2n-{c_k}^2}\right]$$

$$r_{k+1}=\frac{1}{r_k}-q_{k+1}=\frac{a_kb_k\sqrt{n}-({b_k}^2n-{c_k}^2)q_{k+1}-a_kc_k}{{b_k}^2n-{c_k}^2}$$

　従って

$$a_{k+1} = b_k{}^2 n - c_k{}^2 \quad b_{k+1} = a_k b_k \quad c_{k+1} = \left(b_k{}^2 n - c_k{}^2\right) q_{k+1} - a_k c_k$$

とできる。

この方法で計算するとき、誤差を生ずる可能性があるのは q_k を計算する部分で $\sqrt{n}$ を用いているところのみである。その部分ではガウス記号で整数部分を取り出すのでまず誤差を生じないであろう。また､整数にしてしまうので､次の k に誤差を持ち越して誤差をどんどん積もらせていくことはない。

早速この漸化式を用いてプログラムしてみたが、やはりうまくいかない。a_k, b_k, c_k の値があっという間に大きくなってオーバーフローしてしまうのである。原因は分数式のところで約分していないからである。

アプローチ３.

簡単な例を筆算してみると、約分したものはいずれも次のような式となる。

$$r_k = \frac{\sqrt{n} - m_k}{l_k} \quad \left(l_k, m_k \in Z\right)$$

すなわち、分子の $\sqrt{n}$ の係数は約分の後必ず１となるのである。これが正しいことを証明するのには少々苦労した｡(詳細は課題研究の再に作成した報告書もしくは平成８年度の富山県高教研発表資料「数学Ⅰ，Ａの指導メモ」にある。)

さらに、$l_k, m_k > 0 \quad n > m_k{}^2 \quad l_k \mid n - m_k{}^2$ であることを証明することにより、$\sqrt{n}$ は無限循環連分数に展開されることの証明も得られた。

以上の考察経験からコンピュータの計算も単純にプログラムしただけでは解決できない問題があり、数学的に考察することも重要であることを再確認した。

課題研究は数表

$$\sqrt{2} = [1,2,2,2,\cdots] = \left[1,\dot{2}\right]$$

$$\sqrt{3} = [1,1,2,1,2,\cdots] = \left[1,\dot{1},\dot{2}\right]$$

$$\sqrt{5} = [2,4,4,4,\cdots] = \left[2,\dot{4}\right]$$

$$\sqrt{6} = [2,2,4,2,4,\cdots] = \left[2,\dot{2},\dot{4}\right]$$

・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・

$$\sqrt{97} = \left[9,\dot{1},5,1,1,1,1,1,1,5,1,\dot{18}\right]$$

$$\sqrt{98} = \left[9,\dot{1},8,1,\dot{18}\right]$$

$$\sqrt{99}=\left[9,\dot{1},\dot{1}8\right]$$

を計算するところまでで終了した。

平成８年度に高教研数学部会で発表することになり　、報告書の一部に以上の経過をまとめていたとき、作成してあった連分数展開の表からいくつかの事実に気づき、それについて証明を与えた。（証明できてないものもあるが）

1．$\lfloor\sqrt{n}\rfloor=m$　とすると、$\sqrt{n}$ の連分数展開は、第２項から循環節が始まり、最終項は $2m$ である。

すなわち　$\sqrt{n}=\left[m,\dot{q}_1,\cdots,q_{k-1},2\dot{m}\right]$

2．$\sqrt{n}$ の連分数展開の循環節の長さが１である　$\Leftrightarrow$　$n=m^2+1$

$$\sqrt{m^2+1}=\left[m,2\dot{m}\right]$$

3．$\sqrt{m^2-1}=\left[m-1,\dot{1},2\dot{m}-2\right]$

（ただし、$n=m^2-1$ は循環節の長さが２であることの必要十分条件ではない。例えば $\sqrt{6}=\left[2,\dot{2},\dot{4}\right]$）

以上、ささやかではあるが、帰納的に数学に取り組む経験ができた。

b)ユークリッドの互除法が終了するまでの計算回数について

平成４年度の課題研究でユークリッドの互除法を扱ったが、その後卒業生から「互除法はどれくらいの計算回数で終了するのか」という相談を受けたので考えてみた。（詳しくは「数学のメモ」にある）

２つの正の整数 $a>b>0$ からはじめ、$r_1=a\pmod{b}$，　$r_2=b\pmod{r_1}$，・・・，

$r_{k+2}=r_{k+1}\pmod{r_k}$　　と続けていき、$r_n=(a,b)$（最大公約数）　を得る。このとき、n を計算回数とする。

主張１．$b<2^{l+1}$　ならば　$n\le 2l$

これは $r_{k+2}<\frac{1}{2}r_k$ を示すことにより、簡単に得られる結果である。しかしながら、この評価ではずいぶん荒っぽいものとなってしまう。

主張２．数列 $\{f_l\}$ を $f_1=1, f_2=2$　$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$　で定義されるフィボナッチ数列とする。このとき、

・$f_l<b<f_{l+1}$　ならば　$n<l$

・$b=f_{l+1}$　ならば　$n=l$

これは、計算回数の一覧表から読みとれること、および筆算による数列の減少度合いからの経験から

予想されたものである。そして数学的帰納法で証明を与えた。上からの評価により、たとえば$b \le 1000$については高々１４回の計算で互除法が終了することがわかる。

課題. bが大きくなるにつれ計算回数は徐々に増えていく。計算回数が 0,1,2,3,・・・で到達できる最大のbを手持ちの表から読みとって並べていくと、1,2,6,10,24,54,96,・・・・となるのであるが、この数の規則性や計算回数の下からの評価については、今のところ私はうまい説明を持っていない。

c)ある種のピタゴラス数を与える漸化式の生徒による発見 ・・・２次形式の応用による証明

平成 9 年度の課題研究では「ピタゴラスの三角形」を担当した。やはり「帰納的」を念頭におき、$x^2 + y^2 = z^2$をみたす整数で

（１） $x, y \le 100$であるピタゴラス数のリスト作成

（２）原始ピタゴラス数の媒介変数表示 $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$

（３） x, y, zのいずれかは 3 で割り切れること。また、いずれかは５で割り切れること

（４） $z = y + 1$をみたすピタゴラス数はどんなものか

（５） $|x - y| = 1$をみたすピタゴラス数はどんなものか

について考察した。

（４）の$z = y + 1$をみたすものについては、コンピュータを用いて$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = x = m^2 + n^2$から数表を作成して、該当するものを抜き出すと、$m = n + 1$であることがわかり、$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1$であると決定できた。

（５）については大変珍しいもので、作成したリストには少ししか現れない。そこで、$x^2 + y^2 = z^2$ $y = x + 1$をみたすピタゴラス数について簡単なプログラムを作成し、$x, y \le 100000$の範囲で調べてみると、

$$(x, y, z) = (3,4,5), (20,21,29), (119,120,169), (696,697,985), (4059,4060,5741), (23660,23661,33461)$$

の 6 個しか見つからない。これらの数は急激に大きくなることもあり、どのような性質を持つのかを言い当てるのは難しいのではないかと思われた。しかし、生徒の一人が次のような事実を発見した。

定理 $x^2 + y^2 = z^2$ $|x - y| = 1$ **をみたすピタゴラス数で** x **を奇数、** y **を偶数とするときの組を** $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ **とする。**（$x_1 = 3, x_2 = 21, x_3 = 119, x_4 = 697, x_5 = 4059, x_6 = 23661, \cdots\cdots$）

このとき、 $x_n = a_n a_{n+1}$ $a_1 = 1, a_2 = 3$ $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ **が成り立つ。**

この発見を聞いたときは大変驚いた。数値を確かめると確かにあっている。どうして考えついたのか尋ねてみると、以下のような経過であった。

まず、$x_n : 3, 21, 119, 697, 4059, \cdots$ の素因数分解を考える。

3=1×3， 21=3×7，119=7×17，697=17×41，4059=41×99，・・・・
（ただし、99 は素数ではない。）
素因数を並べて

a_n ：1，3，7，17，41，99，・・・・

この数列から見つけた規則が

$a_1=1, a_2=3 \quad a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$

であった。

生徒とともにこの漸化式が正しいこと、そしてこの方法で全ての $x^2+y^2=z^2 \quad |x-y|=1$ を網羅できることを証明しようと努力したが、課題研究発表会までには目標を達成することができなかった。

その後、名古屋大学の大沢健夫先生が理数科へ出張講義にいらっしゃった際に、昼食をご一緒にさせていただき、上記の未解決の問題について話題にした。大学に帰ったら北岡良之先生に伝えていただけるということになり、まもなくアドバイスが届いた。2 次形式に帰着すればよいというのである。早速 2 次形式の一般論を復習し、この問題に適用して生徒の発見した漸化式が正しいことが確認できた。以下に概要を述べる。（詳しくは、平成 10 年度富山県高教研発表資料「数学Ⅲ、C とその周辺についてのメモ」に書いてある。）

方法１.

$x^2+y^2=z^2$ の媒介変数表示 $x=m^2-n^2, y=2mn, z=x=m^2+n^2$ において $x=y+1$ とおくと、

$m^2-n^2=2mn+1$　変形して　$(m-n)^2-2n^2=1$

$X=m-n, Y=n$ とおいて　2 次形式　$X^2-2Y^2=1$ の整数解の問題に帰着。

$x=y-1$　の場合には　$X^2-2Y^2=-1$　に帰着。

方法 1 が北岡先生からのアドバイスに従ったもので、生徒の発見した漸化式はそれから導かれる。
考察を進める中、次のような方法も考えられた。

方法 2.

$x^2+y^2=z^2$ に $y=x+1$ を代入して変形すると　$(2x+1)^2-2z^2=-1$　を得る。

これから $X^2-2Y^2=-1$ の整数解の問題に帰着

方法２から、以下のような構成法も可能であることがわかった。

定理　$x^2+y^2=z^2 \quad y=x+1$　をみたすピタゴラス数の組の列を $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ とすると、

$x_0=0, z_0=1 \quad x_{n+1}=3x_n+2z_n+1, \quad z_{n+1}=4x_n+3z_n+2$

上記に至る計算には２次体 $Q(\sqrt{2})$ の単数群 $O_F^{\times}$ の知識を用いる。一般論を具体的な問題に適用でき、身近なものに感じられたことがうれしかった。

この問題に関連した話題として以下のものがある。

平成 11 年度の算数オリンピックでは「$1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n$　をみたすものは？」という出題があった。

これは条件式を $(2n+1)^2-2(2k+1)^2=-1$ と変形することにより、同じ 2 次形式に帰着して解決する。

従って、課題研究で扱ったピタゴラス数、$x^2+y^2=z^2 \quad y=x+1$ と $1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n$ は $x=n, z=2k+1$ によって結びついている。

ピタゴラス数については、平成 10 年度に高教研の数学部会で報告するに当たって、$x^2+y^2=z^2$ $y=x+k$ （k は奇数）の場合についても少し考察してみた。それは、$X^2-2Y^2=-k^2$ に帰着される。その解についての２次形式の表現数は $R(k^2)=\sum_{m|k^2}\chi_8(m)$

$k=p$（奇素数）の場合 $R(p^2)=\chi_8(1)+\chi_8(p)+\chi_8(p^2)=2+\chi_8(p)=2+\left(\dfrac{2}{p}\right)$

平方剰余の相互法則第２補充法則より

$p\equiv 3,5 \pmod 8$ のとき、$R(p^2)=1$ 　$p\equiv 1,7 \pmod 8$ のとき、$R(p^2)=3$

（１） $p\equiv 3,5 \pmod 8$ のとき、

表現数が１であるから、$X^2-2Y^2=-1$ のときと同様、最小解を求め、それから全ての解が漸化式を通して得られる。ところで $X^2-2Y^2=-1$ の解をそれぞれ p 倍することにより $X^2-2Y^2=-p^2$ の解が得られることから考察して、$x^2+y^2=z^2 \quad y=x+1$ を p 倍した非原始的なものしか存在しないことが結論される。

（２） $p\equiv 1,7 \pmod 8$ のとき、

表現数が３であることから、$X^2-2Y^2=-p^2$ には３つの同値でない解の列ができる。そのうち、$X_0=p, Y_0=p$ からスタートする列は、（１）のときと同様に $x^2+y^2=z^2 \quad y=x+1$ を p 倍した非原始的なものに結びついている。他の２つの列はどうであろうか？

最も簡単な $p=7$ の場合について考えてみると

定理 $x^2+y^2=z^2 \quad y=x+7$ をみたすピタゴラス数は

$(x_1,y_1,z_1)=(5,12,13) \quad (x_2,y_2,z_2)=(8,15,17)$

$x_{n+2}=3x_n+2y_n+7 \quad y_{n+2}=4x_n+3z_n+14$

による２つの原始的な列と $x^2+y^2=z^2 \quad y=x+1$ を７倍した非原始的なものからなる。

もう少し他の p の場合や合成数の場合についても考えてみればよいと思うが、時間を見つけられずにいる。

d)正多角形の作図問題に関する基礎知識

平成 12 年度の課題研究では「正多角形と正多面体」の研究班を担当した。正多角形の作図では、複素数平面の授業および三角関数の加法定理のところで重ねて正五角形の作図について触れておき、課題研究ではそれを振り返ることからスタートした。正十七角形の作図について、高木貞治著「近世数学史談」にあるガウスのアイディアに従った作図法を実行した。しかしながらいくつかのことは曖昧にせざるを得なかった。それは以下の項目である。

（１） 作図可能な条件とは。そしてそれが方程式の代数的な解法といかに関わっているのか。

（２） 正ｎ角形の作図条件は

$$n = 2^{\lambda} p_1 p_2 \cdots p_k \quad (\lambda = 0,1,2,\cdots,\quad \text{各 } p_i \text{ は相異なるフェルマー素数})$$

であることの証明

（３） 正十七角形作図についての Gauss のアイディアについて・・・・どうして「近世数学史談」にあるようなうまい数の組み合わせを構成できるか？その理由

それらについて、課題研究発表会が終わった後、時間をみつけて、永田雅宜著「可換体論」、アルティン著「ガロア理論入門」などで調べた。それにより（１）（２）は理解できた。しかしながら、正十七角形作図についての Gauss のアイディアについての解説は見つからなかった。最近の本は抽象的なことが中心で、具体的な問題は余り扱っていないように思われる。先輩の先生に 1974 年の「大学への数学」に河合良一郎先生が連載されていた記事を紹介していただき、読んでみたが、依然としてアイディアの理解には至らなかった。ようやくポストニコフ著「ガロアの理論」（これには具体的な計算などがたくさん書いてあった）によって作図に関する Gauss のｆ項周期のアイディアを理解することができた。それは１の原始ｐ乗根による円周等分多項式への作用とそれに対応する１のｐ乗根のグループ分けである。一応のことをまとめて同僚の先生に配布した。（その他のことと併せて「数学のメモ」にまとめておいた）

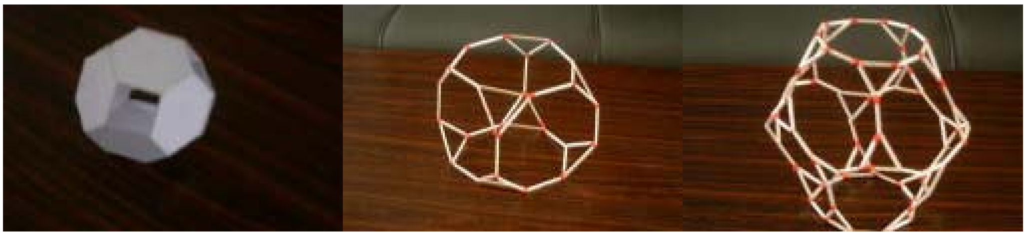
e)C60 フラーレンからの類推による C24 の形状

・・・数学コンクールの問題より

「正多角形と正多面体」の研究の最後に、生徒が調べたことの一つに「サッカーボールの形は正二十面体の各頂点の周りを面取りしたものである」というのがあった。サッカーボールの形は炭素の結晶の一つ C60 フラーレンの形であることを以前数学セミナーの記事で読み、あんなきれいな形をどうやって思いついたのであろうかと、すっと不思議に思いつづけていたのであった。生徒の説明に、そうだったのかと勉強させられた。

それから数ヶ月、名古屋大学が企画している「日本数学コンクール」で「C60 ではなく C24 だったらどんな形であろうか」と言う問題が出題されたという記事を見た。課題研究の発表用に生徒が作ったサッカーボールの紙模型をその後も職員室の天井からのコードにぶら下げておいたのを眺めながら、この問題について化学の先生と雑談した。なぜ C60 以外は存在しないかは、結合力が原因であるとか言われているがと聞くが、はっきりとした答えは得られなかった。また、物理の先生とも話題にしたが、彼が言うには「C は 4 本手が出ているはずなのに、サッカーボールにしても１本手が余っていますよね」と。「それはベンゼンと一緒で二重結合のためにもう１本使っているのでは」と提案したら納得してもらえたので少しうれしくなった。

その時は余り深く考えなかったが、帰宅後ふと生徒が報告した「面を取って」という言葉を思い出して、全ての正多面体の頂点について面取りをしてみた。すると異なる２つの種類の「C24」ができた。それは正六面体からできるものと正八面体からできるものである。残りは C12（正四面体から）、サッカーボールとは異なる C60（正十二面体から）である。なるほどと思って簡単にまとめて数学の先生と物理、化学の先生に報告した。ただし、「サッカーボール型の C60 以外には実際には存在しない理由は、結合力について何かしらの微分方程式などを立てて、極小条件等を考えなくてはいけないのか？」と疑問を投げかけるしかなかった。ちょっと手におえないのかという気持ちであった。どれも手は 3 本ずつ伸びているので、その点では相違点がないのだが。



さらにしばらく後、理数科 3 年の授業のちょっとした合間に上記の問題に触れた。面取りがヒントであることまではコメントしておいたが、受験勉強に忙しい時期に興味を示すものがいるかどうかはわからなかった。すると、正多面体について報告した生徒が「これです」と正八面体を面取りした方の C24 を紙で作って持ってきた。ほう、と思ったが、すかさず「もう一つあるはずなのでそれも作ってきなさい」と告げた。すると今度はマッチ棒をうまく接着して、正六面体を面取りした C24 の骨格模型を作ってきた。先生方に配った報告書をこの生徒にも渡し、他の骨格模型の作成も依頼した。私自身もマッチ棒の模型を作成してみたが、接着剤を選ばないとうまくできない。紙の模型のほうは割と楽にできる。化学で分子模型を作成するパーツをうまく用いることができないかと思うのだが。

このように反応してくれる生徒がいることは、理数科で教えていて本当によかったと思えることの一つである。現勤務校で１０年目を迎え、もうじき転勤が迫ってくるであろうが、次に理数科のある学校で勤務できる確率は非常に低い。若い時期に課題研究を担当できたことは幸運であったと思う。

さて、図を書いているだけではわからないことが、立体で実物を眺めることによって見えてくることもあるものである。C12 および C24 が 2 種類、C60 が 2 種類できたわけであるが、よく見るとサッカーボール型以外のものは頂点から伸びる 3 本の手が作り出す 3 つの角度がかなりアンバランスなのである。唯一サッカーボール型のものだけ、わりと近い角度である。正六角形と正五角形の内角120°と108°の差であり、許容範囲としてなんとかバランスをとれるのかもしれない。この考えは正しいのかどうかは確かめていないが、模型を見ながら説明すると他の先生方の同意が得られた。機会があれば正確な理由を知りたいものだと思っている。

５．おわりに

インターネットの普及に伴い、都会と地方の情報格差がなくなりつつあるといわれることもあるが、実際にはそうでもない部分がたくさんある。たとえば、我々が住んでいるところでは、数学をはじめ専門書、啓蒙書を扱っている書店を身近に見つけることは出来ない。また、都会では高校生や一般市民に対する数学の講座が企画されており、数学セミナー等で案内を見かけるが、距離的な面を始め様々な障害があるため、教え子を参加させることが困難であるし、自分が参加することもできていない。よい資質を持った生徒がいたとしても、何かしらの機会に数学や科学に出会うチャンスが与えられないとその資質を十分に伸長させることができずに終わってしまうかもしれない。特に理科系の才能は早期に開発することが重要ではないかと考える。最近は理科離れをなんとかしようと、いくつかの催しも企画されているが、学校現場では系統的な対策が講じられているとは言い難い。

教える立場にある我々も、最近では生徒減に伴い学級数が減り、結果教員定数を削減されたため、一人あたりの校務分掌の仕事が増加している。本校のような各学年５クラスずつという小規模な学校では分掌の掛け持ちが当たり前で、さらに昨年、今年と校内 LAN の新設、IT 講習会の実施など、時代の要請による仕事も加わってやるべきことはたくさんある。年齢とともに、仕事も直に生徒と関わること以外のものに変化しているという残念な部分もある。「教えることばかりではなく、数学の専門も是非勉強していただきたい」と昨年の講評にもあった。自分なりには努力を試みているが、上記のような状況で、勉強を進めることは容易ではない。課題研究を担当できるようなチャンスに今後もずっと恵まれるかどうかはわからないが、生徒とともに数学に取り組むことができるように、時間を見つけて本を読んだり、開放講座に参加したりする努力を続けたいと思う。