ガロア群が背景にある入試問題の考察

平成23年度第1回キトキト数学　資料
平成23年10月1日
片山　喜美

以下の問題について考察する。

1. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2$ とし、方程式 $f(x) = 0$ について考える。このとき、以下のことを示せ。

(1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解を持つ。

(2) α が $f(x) = 0$ の解ならば、$g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる。

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に　$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$ とすれば、
$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$
となる。

（神戸大学　2002 年度）

2. $\cos\dfrac{\pi}{7}$ が方程式 $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ の解であることを示せ。また、他の 2 つの解を求めよ。

（ヴァージニア工科大学 第 32 回 Regional Mathematics Contest　2010 年度）

3. 3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ の解の 1 つを α とする。

(1) $\left(2\alpha^2 + 5\alpha - 1\right)^2$ を $a\alpha^2 + b\alpha + c$ の形の式に表せ。ただし、a, b, c は有理数とする。

(2) 上の 3 次方程式の α 以外の二つの解を (1) と同じ形の式で表せ。

（東京大学　1990 年度前期文系）

4. $n = 1, 2, \cdots$ に対して、 x の整式 $P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 3 次方程式 $P_n(x) = 0$ の正の実数解はただ 1 つであることを示せ。

(2) t が $P_n(x) = 0$ の解であるとき、 $P_n\left(\dfrac{-4}{t+2}\right)$ を求めよ。

(3) $P_n(x) = 0$ の正の解を α_n とするとき、 $P_n(x) = 0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。さらに、$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ を求めよ。

（早稲田大学理工　2006 年度）

＜考察する点＞

- これらの問題の解答そのものについては、計算すればそれでよい。でも、どうしてこのような問題を思いつくのか? ⋯ それがガロア群に関わる。

- 問 1 では、$f(x)$ のガロア群が 3 次の交代群 A_3 であり、g による写像がその生成元となる。
  出題者はどこから $g(x) = x^2 - 2$ を導きだしたのか？
  三角関数が 1 つのヒントと言える。

- 問２はあらかじめ三角関数を与えて問題としている。
- 問３でも $f(x)$ のガロア群が３次の交代群 A_3 なのであるが、出題者が $\left(2\alpha^2+5\alpha-1\right)^2$ をどうやって思いつくかという点である。これは、三角関数に結びつけて考えることができるのかどうか？
- 問４では、方程式の係数にパラメータ n が入っている。また、ガロア群の作用を与える写像が分数関数となっている。

※平成 22 年８月に、匿名のメールで問１、問２について、出題の背景が分かるかという質問をいただいた。その後のやりとりで、問３の方程式についても質問があった。それが早稲田大学の入試問題であったことは、最近、別の人（この人の掲示板に同じ匿名の人から書き込みがある）のサイトを見て知った。

問２は、Putnam Exam 関連で閲覧していて目にしたものである。

問１について

□解答概略

(1) 微分して、増減を調べ、 $f(-2)=-1, f(-1)=3$ （極大）,$f(0)=1, f(1)=-1$ （極小）, $f(2)=3$ から、$-2<\alpha_1<-1, 0<\alpha_2<1, 1<\alpha_3<2$ を満たす３つの解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ を持つ。

(2) $f(g(\alpha))=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha-1)(\alpha^3-3\alpha+1)=0$

(3) (2) より $g(\alpha_1)$ も $f(x)=0$ の解である。従って、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ のいずれかになる。どれになるかを考える。$g(x)=0$ とすると $x=\pm\sqrt{2}$ 、$g(x)=1$ とすると $x=\pm\sqrt{3}$ であることに注意する。
$f(\sqrt{3})=\cdots=1>0$ となるから、$-2<\alpha<-\sqrt{3}$ で、$2>g(\alpha)>1$ 。従って、 $g(\alpha_1)=\alpha_3$ となる。
同様に考えて、$g(\alpha_2)=\alpha_1, g(\alpha_3)=\alpha_2$ を示すことができる。

□三角関数との関わりを考える。

$f(x)=0$ で、$x=y+\dfrac{1}{y}$ と置いて整理すると、$y^6+y^3+1=0$ となる。

$y^9-1=(y^3-1)(y^6+y^3+1)=0$ と結びつけると、$y=\cos\theta+i\sin\theta$ で、$9\theta=2\pi\times n$ かつ $3\theta\neq 2\pi\times m$ 。よって、$\theta=\pm\dfrac{2\pi}{9},\pm\dfrac{4\pi}{9},\pm\dfrac{8\pi}{9}$ 。$x=y+\dfrac{1}{y}=2\cos\theta$ であるから、x の相異なる値としては３つ。 さらに、 $2\times\dfrac{8\pi}{9}=\dfrac{16\pi}{9}=-\dfrac{2\pi}{9}+2\pi$ より、θ を２倍にしていくことで、解を巡回していく。そして、$2\cos 2\theta=2(2\cos^2\theta-1)=(2\cos\theta)^2-2$ となることから、$g(x)=x^2-2$ とすればよいことが分かる。

解の巡回について

$g(\alpha)=\alpha^2-2$ をさらに写していく

- $g(g(\alpha))=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2=\alpha(\alpha^3-3\alpha+1)-\alpha^2-\alpha+2\equiv-\alpha^2-\alpha+2$
- $g(g(g(\alpha)))=(-\alpha^2-\alpha+2)^2-2=\alpha^4+2\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+2=(\alpha+2)(\alpha^3-3\alpha+1)+\alpha\equiv\alpha$
(元の α に戻った。)
- 従って、$\alpha\mapsto\alpha^2-2$ による写像により３つの解 $\alpha,\ \alpha^2-2,\ -\alpha^2-\alpha+2$ を巡回する。

※これが、ガロア群 A_3 の作用を具現している。

問２について

□解答概略

$x=\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$ と置いて代入すると、$y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1=0$ 。

$y^7+1=(y+1)(y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1)$ に注意すると、$y^7=-1$ かつ $y\neq-1$ 。従って、$y=\cos\theta+i\sin\theta$ で、$7\theta=\pi+2\pi\times n$ かつ $\theta\neq\pi+2\pi\times m$ 。よって、$x=\cos\dfrac{\pi}{7},\cos\dfrac{3\pi}{7},\cos\dfrac{5\pi}{7}$

注意：

この場合、$3\times\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{9\pi}{7}=-\dfrac{5\pi}{7}+2\pi,\quad 3\times\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{15\pi}{7}=-\dfrac{\pi}{7}+2\pi$ であるから、θ を 3 倍にしていくことで、解を巡回していく。

従って、3 倍角の公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ から、次のことが言える。

「 α が方程式 $8x^3-4x^2-4x+1=0$ の解であるとき、 $4\alpha^3-3\alpha$ もこの方程式の解である。」

実際、$8(4\alpha^3-3\alpha)^3-4(4\alpha^3-3\alpha)^2-4(4\alpha^3-3\alpha)+1$

$$=512\alpha^9-1152\alpha^7-64\alpha^6+864\alpha^5+96\alpha^4-232\alpha^3-36\alpha^2+12\alpha+1$$
$$=(64\alpha^6+32\alpha^5-96\alpha^4-48\alpha^3+32\alpha^2+16\alpha+1)(8\alpha^3-4\alpha^2-4\alpha+1)=0$$

解の巡回について

$g(\alpha)=4\alpha^3-3\alpha$ をさらに写していく

- $g(g(\alpha))=4(4\alpha^3-3\alpha)^3-3(4\alpha^3-3\alpha)=256\alpha^9-576\alpha^7+432\alpha^5-120\alpha^3+9\alpha$
  $=(32\alpha^6+16\alpha^5-48\alpha^4-20\alpha^3+18\alpha^2+5\alpha-1)(8\alpha^3-4\alpha^2-4\alpha+1)-2\alpha^2+1\equiv-2\alpha^2+1$
- $g(g(g(\alpha)))=4(-2\alpha^2+1)^3-3(-2\alpha^2+1)=-32\alpha^6+48\alpha^4-18\alpha^2+1$
  $=(-4\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha+1)(8\alpha^3-4\alpha^2-4\alpha+1)+\alpha\equiv\alpha$ (元の α に戻った。)
- 従って、$\alpha\mapsto4\alpha^3-3\alpha$ による写像により 3 つの解 $\alpha,\ 4\alpha^3-3\alpha,\ -2\alpha^2+1$ を巡回する。

※これが、ガロア群 A_3 の作用を具現している。

問３について

□解答概略

(1) $(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1=(4\alpha+8)(\alpha^3+3\alpha^2-1)-3\alpha^2-6\alpha+9=-3\alpha^2-6\alpha+9$

(2) $x^3+3x^2-1=(x-\alpha)\{x^2+(\alpha+3)x+\alpha^2+3\alpha\}$

ここで、 $x^2+(\alpha+3)x+\alpha^2+3\alpha=0$ を解の公式で解くと、

$$x=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{(\alpha+3)^2-4(\alpha^2+3\alpha)}}{2}$$
$$=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}}{2}$$
$$=\frac{-(\alpha+3)\pm(2\alpha^2+5\alpha-1)}{2}\quad\text{((1) の結果を利用した。)}$$
$$=\alpha^2+2\alpha-2,\quad -\alpha^2-3\alpha-1$$

さて、この場合はどうやって $=\alpha^2+2\alpha-2,\quad -\alpha^2-3\alpha-1$ もしくは、$-3\alpha^2-6\alpha+9=\left(2\alpha^2+5\alpha-1\right)^2$ を見つけるのだろうか。ガロア群から考えてみる。

ガロア群の知識から

- $f(x) \in \mathbb{Q}$ を既約多項式、体 L を $\mathbb{Q}$ 上の $f(x)$ の最小分解体、$n = [L:\mathbb{Q}]$ （拡大次数）、
$G = Gal(L/\mathbb{Q}) \subset S_n$ とするとき、G は推移的な部分群である。

- $f(x) \in \mathbb{Q}$ を既約な 3 次式、体 L を $\mathbb{Q}$ 上の $f(x)$ の最小分解体、$G = Gal(L/\mathbb{Q}) \subset S_n$ 、
D を $f(x)$ の判別式とする。
もし、$\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$ ならば、G は交代群 A_3 である。
（以上については、ここでは証明を略する。）

このとき、$[L:\mathbb{Q}] = 3$ であり、$f(x)$ の根の 1 つを α とすると、$L = \mathbb{Q}(\alpha)$ 、すなわち、1 つの根の $\mathbb{Q}$ 係数の有理式で他の 2 つの根を表すことができる。さらに、 $\mathbb{Q}$ 上 $1, \alpha, \alpha^2$ が L の基底となるので、他の 2 つの根は α の高々2 次式で表すことができる。

3 次方程式 $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ の判別式は、$D = a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_3^2$ であることが知られている。
$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ の場合は、$D = -4 \cdot 3^3 \cdot (-1) - 27 \cdot (-1)^2 = 3^4 \in \mathbb{Q}$ 。従って、ガロア群は交代群であり、１つの解を α とすると、他の 2 つは α の高々2 次式で表すことができる。
従って、上記の解答に現れる $\sqrt{-3\alpha^2 - 6\alpha + 9}$ のルートがはずれないといけない。
そこで、$-3\alpha^2 - 6\alpha + 9 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)^2 + p(\alpha)(\alpha^3 + 3\alpha^2 - 1)$ について考える。
$(a\alpha^2+b\alpha+c)^2 = a^2\alpha^4+2ab\alpha^3+(b^2+2ca)\alpha^2+2bc\alpha+c^2 = (a^2\alpha-3a^2+2ab)(\alpha^3+3\alpha^2-1)+(9a^2+b^2-6ab+2ca)\alpha^2+(a^2+2bc)\alpha+(-3a^2+c^2+2ab) \equiv (9a^2+b^2-6ab+2ca)\alpha^2+(a^2+2bc)\alpha+(-3a^2+c^2+2ab)$
。
$-3\alpha^2 - 6\alpha + 9$ と係数を比較して、連立方程式

$$\begin{cases} 9a^2 + b^2 - 6ab + 2ca = -3 \\ a^2 + 2bc = -6 \\ -3a^2 + c^2 + 2ab = 9 \end{cases}$$

を解く。これを筆算で解けるのか？
maxima でやってみる。(以下は、実際の maxima の表示とは異なる)

入力
$solve([2*a*c+b^2-6*a*b+9*a^2=-3, 2*b*c+a^2=-6, c^2+2*a*b-3*a^2=9], [a,b,c]);$
出力
$[[a=2, b=5, c=-1], [a=-2, b=-5, c=1],$
$[a=-1.688059240975008, b=-4.962375339981867, c=0.89166406493912],$
$[a=-0.89819759679573, b=-1.10833593506088, c=3.07071129707113],$
$[a=0.58625678119349, b=1.07071129707113, c=-2.962375339981868],$
$[a=1.688059240975008, b=4.962375339981867, c=-0.89166406493912],$
$[a=0.89819759679573, b=1.10833593506088, c=-3.07071129707113],$
$[a=-0.58625678119349, b=-1.07071129707113, c=2.962375339981868]]$

正負４つずつ解の組があるが、それらのうち $a = 2,\ b = 5,\ c = -1$ を採用することにすると、
$-3\alpha^2 - 6\alpha + 9 = (2\alpha^2 + 5\alpha - 1)^2$ を得ることになる。
このようにして見つけるのだろうか。疑問が残る。

問１との関係

実はこの問題の方程式は、問１の方程式から平行移動の変数変換を施したしたものに過ぎないのである。

そのことについて、以下に述べる。

$x^3+3x^2-1=0$ において、$x \mapsto x-1$ とすると, $(x-1)^3+3(x-1)-1 = x^3-3x^2+3x-1+3x^2+6x+3-1 = x^3-3x+1=0$ 。

従って、問３の解 $\alpha_1.\alpha_2, \alpha_3$ を、問１の解 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ と $\alpha_i = \beta_i - 1,\ (i=1,2,3)$ として結びつけ、問１の結果を利用できる。

$\alpha_2 = \beta_2 - 1 = (\beta_1^2 - 2) - 1 = (\alpha_1+1)^2 - 3 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1 - 2$

$\alpha_3 = \beta_3 - 1 = (-\beta_1^2 - \beta_1^2 + 2) - 1 = -(\alpha_1+1)^2 - (\alpha_1+1) + 1 = -\alpha_1^2 - 3\alpha_1 - 1$

そして、 $x^3+3x^2-1 = (x-\alpha)\{x^2+(\alpha+3)x+\alpha^2+3\alpha\}$

ここで、 $x^2+(\alpha+3)x+\alpha^2+3\alpha=0$ を解の公式で解くと、

$x = \dfrac{-(\alpha+3) \pm \sqrt{(\alpha+3)^2-4(\alpha^2+3\alpha)}}{2} = \dfrac{-(\alpha+3) \pm \sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}}{2}$

と計算したところで、上で得られた結果を用いて

$\dfrac{-(\alpha+3)+\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}}{2} = \alpha^2+2\alpha-1$ と置くと、$-3\alpha^2-6\alpha+9 = (2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を得る。これが出題の経緯だったと考えるとすると、ある程度納得できるのではないだろうか。

問４について

今度は少しややこしそうに見える。そこで、まず、判別式及びガロア群について考えてみる。 方程式 $x^3-nx^2-(2n+12)x-8=0$ の判別式は、

$D = (-n)^2(-2n-12)^2 + 18(-n)(-2n-12)(-8) - 4(-2n-12)^3 - 4(-n)^3(-8) - 27(-8)^2$

$= 4n^4+48n^3+432n^2+1728n+5184 = 4(n^2+6n+36)^2$ （注意：計算には maxima を使った）

従って、 $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$ となり、この３次方程式のもガロア群は交代群 A_3 であり、問１〜問３の場合と同様に、１つの解 $\alpha \notin \mathbb{Q}$ の有理数を係数とする有理関数によって他の２つの解が表されることが分かる。

しかし、それがどんな式であるかについて、与えられた方程式の係数から解明するのは難しいように思う。いったい、どうやって、$g(\alpha) = \dfrac{-4}{\alpha+2}$ という式を見つけ出すのか？

逆転の発想で、$\alpha \mapsto \dfrac{-4}{\alpha+2}$ を先に考える。この１次分数変換を表す行列は、$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であり、$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8E$ となるから、対応する変換は、$g(g(\alpha)) = -\dfrac{2\alpha+4}{\alpha}$, $g(g(g(\alpha))) = \alpha$ となり、位数３の巡回となる。

従って、 α, $\beta = g(\alpha) = \dfrac{-4}{\alpha+2}$, $\gamma = g(g(\alpha)) = \dfrac{-2(\alpha+2)}{\alpha}$ を解とする $\mathbb{Q}$ 上既約な３次方程式を作ると、ガロア群が交代群 A_3 となるものと考えられる。その係数を考えると、

- $a = \alpha+\beta+\gamma = \alpha + \dfrac{-4}{\alpha+2} + \dfrac{-2(\alpha+2)}{\alpha} = \dfrac{\alpha^3-12\alpha-8}{\alpha(\alpha+2)}$
- $b = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \alpha\dfrac{-4}{\alpha+2} + \dfrac{-4}{\alpha+2}\dfrac{-2(\alpha+2)}{\alpha} + \dfrac{-2(\alpha+2)}{\alpha}\alpha = \dfrac{-2\alpha^3-12\alpha^2+16}{\alpha(\alpha+2)} = \dfrac{-2(\alpha^3-12\alpha-8)-12\alpha}{\alpha(\alpha+2)}$
$-2a-12$
- $c = \alpha\beta\gamma = \alpha\dfrac{-4}{\alpha+2}\dfrac{-2(\alpha+2)}{\alpha} = 8$

方程式は、$x^3-ax^2-(2a+12)x-8=0$ と、問４で扱われているものになる。

このように、変換を先に考えて、そこから３次方程式を作ったと考える方が自然ではないだろうか。

問４の方法を用いて、問１〜問４について考える

もう少し一般的に、$A = \begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ とすると、$A^2 = \begin{pmatrix} -t^2 & -t^3 \\ t & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -t^3 & 0 \\ 0 & -t^3 \end{pmatrix} = -t^3E$ である。

$g(\alpha)=\dfrac{-t^2}{\alpha+t}$ と置いて、$g(g(\alpha))=\dfrac{-t(\alpha+t)}{\alpha}$,　$g(g(g(\alpha)))=\alpha$
これらを解に持つ方程式を考える。

- $a=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+g(\alpha))+g(g(\alpha))=\alpha+\dfrac{-t^2}{\alpha+t}+\dfrac{-t(\alpha+t)}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3-3t^2\alpha-t^3}{\alpha(\alpha+t)}$
- $b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\dfrac{-t^2}{\alpha+t}+\dfrac{-t^2}{\alpha+t}\dfrac{-t(\alpha+t)}{\alpha}+\dfrac{-t(\alpha+t)}{\alpha}\alpha$
  $=\dfrac{-t\alpha^3-3t^2\alpha^2+t^4}{\alpha(\alpha+t)}=\dfrac{-t(\alpha^3-3t^2\alpha-t^3)-3t^3\alpha-3t^2\alpha^2}{\alpha(\alpha+t)}$
  $=-ta-3t^2$
- $c=\alpha\beta\gamma=\alpha\dfrac{-t^2}{\alpha+t}\dfrac{-t(\alpha+t)}{\alpha}=t^3$

従って、これら 3 つを解とする 3 次方程式は、
$$x^3-ax^2-(ta+3t^2)x-t^3=0$$
これを用いて、問１～問３について考える。

- $t=-1$ のとき
  - 方程式は、$x^3-ax^2+(a-3)x+1=0$
  - さらに、$a=0$ として、$x^3-3x+1=0$
    これは、問１の方程式である。
  - このとき、$g(\alpha)=\dfrac{-1}{\alpha-1}$
    問１に出てきた変換とは異なる（ように見える）が、$-(\alpha-1)(-\alpha^2-\alpha+2)=(\alpha^3-3\alpha+1)+1\equiv 1$ より、
    $-\alpha^2-\alpha+2\equiv\dfrac{-1}{\alpha-1}$ であり、問１の $g(g(\alpha))$ と同じ変換を与えている。 $g(g(g(g(\alpha))))=g(\alpha)$ より、g と反対の順で 3 次の巡回を与えている。また、体の拡大が $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}[\alpha]$ であることから、有理関数をすべて多項式に直せるが、ここではそれを具体的にやっていることになる。
  - なお、$-\alpha^2-\alpha+2\equiv\dfrac{-1}{\alpha-1}$ は、互除法を使って導くこともできる。
- $t=1$ のとき
  - 方程式は、$x^3-ax^2-(a+3)x-1=0$
  - さらに、$a=-3$ として、$x^3+3x^2-1=0$
    これは、問３の方程式である。
  - このとき、$g(\alpha)=\dfrac{-1}{\alpha+1}$
    問３に出てきた変換とは異なる（ように見える）が、$-(\alpha+1)(\alpha^2+2\alpha-2)=(\alpha^3+3\alpha^2-1)+1\equiv 1$ より、
    $\alpha^2+2\alpha-2\equiv\dfrac{-1}{\alpha+1}$ 、すなわち、同じ変換を与えている。
- 問２について
  - 方程式 $8x^3-4x^2-4x+1=0$ について、 $x\mapsto\dfrac{1}{2}x$ とすると、方程式は $x^3-x^2-2x+1=0$ となり、それは $\alpha=2\cos\dfrac{\pi}{7}$ を 1 つの解として持つ。
    他の解は
    * $2\cos\dfrac{3\pi}{7}=2(4\cos^3\dfrac{\pi}{7}-3\cos\dfrac{\pi}{7})$
      $=(2\cos\dfrac{\pi}{7})^3-3(2\cos\dfrac{\pi}{7})=\alpha^3-3\alpha=(\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)+\alpha^2-\alpha+1\equiv\alpha^2-\alpha+1$

* $(\alpha^2-\alpha+1)^3-3(\alpha^2-\alpha+1)=\alpha^6-3\alpha^5+5\alpha^3-3\alpha^2+2$
  $=(\alpha^3-2\alpha^2)(\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)-\alpha^2+2\equiv-\alpha^2+2$

  である。

- 一方、$x^3-ax^2-(ta+3t^2)x-t^3=0$ において、 $t=-1$ として、$x^3-ax^2+(a-3)x+1=0$ さらに、$a=1$ として、$x^3-x^2-2x+1=0$ と、問２から上記のようにして得られる方程式と一致する。
- このとき、$g(\alpha)=\dfrac{-1}{\alpha-1}$ で、問２に出てきた変換とは異なる（ように見える）が、$(-\alpha^2+2)(-\alpha+1)=\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+2\equiv 1$ であり、$-\alpha^2+2\equiv\dfrac{-1}{\alpha-1}$ 、すなわち、おなじ変換を与えている。

このように、位数３の変換 $g(\alpha)=\dfrac{-t^2}{\alpha+t}$ から 方程式 $x^3-ax^2-(ta+3t^2)x-t^3=0$ を作り、それから問１〜問４に現れる方程式とその解を変換する式を導くことができる。

もう少し広い範囲の３次方程式、４次方程式などについて、うまく調べることができるものがあるだろうか。