

# 一次不定方程式の合同式による解法

2020年5月

石動高校 片山 喜美

生徒に添削指導をしていたら「合同式で一次不定方程式の整数解を求める方法は？」との質問があった。やってみると、割と簡便な計算で答えにたどり着くのであった。

1.  $97x + 17y = 1$  の整数解の合同式を用いた求め方について

- 17 を法として

$$97x \equiv 1 \pmod{17} \quad \dots \textcircled{1}, \quad 12x \equiv 1 \pmod{17} \quad \dots \textcircled{2}$$

- もとの係数 97 と 12 を比べると、 $97 = 12 \times 8 + 1$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 8$$

$$97x \equiv 1 \pmod{17}$$

$$-) \quad 96x \equiv 8 \pmod{17}$$

$$\hline x \equiv -7 \pmod{17}$$

- 従って、 $x = -7 + 17k$

- 元の式に代入して

$$97 \times (-7 + 17k) + 17y = 1 \quad 17y = (679 + 1) + 97 \times 17 = 680 + 97 \times 17k$$

$$y = 40 + 97k$$

答え  $x = -7 + 17k, y = 40 + 97k$  ( $k$  は整数)

2.  $192x + 73y = 1$  の整数解の合同式を用いた求め方について

- 73 を法として

$$192x \equiv 1 \pmod{73} \quad \dots \textcircled{1}, \quad 46x \equiv 1 \pmod{73} \quad \dots \textcircled{2}$$

- もとの係数 192 と 46 を比べると、 $192 = 46 \times 4 + 8$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 4$$

$$192x \equiv 1 \pmod{73}$$

$$-) \quad 184x \equiv 4 \pmod{73}$$

$$\hline 8x \equiv -3 \pmod{73} \quad \dots \textcircled{3}$$

- 8 と 73 を比べると、 $73 = 9 \times 8 + 1$ 。また、 $73x \equiv 0 \pmod{73} \quad \dots \textcircled{4}$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3} \times 9$$

$$73x \equiv 0 \pmod{73}$$

$$-) \quad 72x \equiv -27 \pmod{73}$$

$$\hline x \equiv 27 \pmod{73}$$

- 従って、 $x = 27 + 73k$  元の式に代入して  $192 \times (27 + 73k) + 73y = 1$

$$73y = -(5184 - 1) - 192 \times 73k \quad y = -71 - 192k$$

答え  $x = 27 + 73k, y = -71 - 192k$  ( $k$  は整数)

3.  $45x + 32y = 4$  の整数解の合同式を用いた求め方について

- 32 を法として

$$45x \equiv 4 \pmod{32} \quad \dots \textcircled{1}, \quad 13x \equiv 4 \pmod{32} \quad \dots \textcircled{2}$$

- もとの係数 45 と 13 を比べると、 $45 = 3 \times 13 + 6$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3$$

$$45x \equiv 4 \pmod{32}$$

$$-) \quad 39x \equiv 12 \pmod{32}$$

$$\hline 6x \equiv -8 \pmod{32}$$

$$3x \equiv -4 \pmod{32} \quad \dots \textcircled{3}$$

- 3 と 32 を比べると、 $3 \times 11 - 32 = 1$ 。また、 $32x \equiv 0 \pmod{32} \quad \dots \textcircled{4}$

$$\textcircled{3} \times 11 - \textcircled{4}$$

$$33x \equiv -44 \pmod{32}$$

$$-) \quad 32x \equiv 0 \pmod{32}$$

$$\hline x \equiv -44 \equiv 20 \pmod{32}$$

- 従って、 $x = 20 + 32k$

- 元の式に代入して

$$45 \times (20 + 32k) + 32y = 4 \quad 32y = -(4 - 900) - 42 \times 32k$$

$$y = -28 - 45k$$

答え  $x = 20 + 32k, y = -28 - 45k$  ( $k$  は整数)

【参考】互除法とそれを遡る計算で整数解を求める方法

45	32	(	1	5	-7
32		(	1	5	5
13	32			5	-2
2	)	26		-4	
13	6			1	-2
12	(2				
1					

上左の互除法の計算から、45 と 32 の最大公約数は 1 である。右に移り、下から上へ計算を登っていき、45 と 32 の右に並ぶ 5 と -7 により、 $45 \times 5 + 32 \times (-7) = 1$  という整数解を得る。(右側の計算の方法は簡単なのだが、ここでは説明省略)

4 倍して、 $45 \times 20 + 32 \times (-28) = 1$

一般解は  $x = 20 + 32K, y = -28 - 45k$  ( $k$  は整数) となる。