$\sqrt{D}$ に収束する１次分数関数

次のような大学入試問題があった。

1. $f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2) $x \geqq 0$ ならば、$f(x) \geqq 2$ であることを示せ。

(3) $x \geqq 2,\quad y \geqq 2$ ならば、$|f(x)-f(y)| \leqq \dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4) $x \geqq 2$ ならば、$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right| \leqq \dfrac{\left|x-\sqrt{7}\right|}{10000}$ となることを示し、これを用いて、$\left|r-\sqrt{7}\right| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を１つ求めよ。

（広島大学）

<解答例>

1. (1) 代入すればできる。

(2) $f(x)-2=\dfrac{8x+21}{3x+8}-2=\dfrac{2x+5}{3x+8}>0//$

(3) $|f(x)-f(y)|=\left|\dfrac{8x+21}{3x+8}-\dfrac{8y+21}{3y+8}\right|=\left|\dfrac{x-y}{(3x+8)(3y+8)}\right| \leqq \dfrac{|x-y|}{(3\cdot 2+8)(3\cdot 2+8)} \leqq \dfrac{|x-y|}{100}$ //

(4) $\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right|=\left|f(f(x))-f(\sqrt{7})\right| \leqq \dfrac{\left|f(x)-\sqrt{7}\right|}{(100)} \leqq \dfrac{1}{100}\left|f(x)-f(\sqrt{7})\right| \leqq \dfrac{1}{100}\dfrac{\left|x-\sqrt{7}\right|}{100}$

//

$x=2$ として、$\left|f(f(2))-\sqrt{7}\right| \leqq \dfrac{\left|2-\sqrt{7}\right|}{10000} \leqq \dfrac{1}{10000}$

$f(2)=\dfrac{37}{14},\quad f(f(2))=\dfrac{590}{223}$． 従って、 $r=\dfrac{590}{223}$

<考察する点>

この入試問題について、ある人からメールで以下のような質問をいただいた。（June 17,2010）

「廣大の函数 $f(x)$ が「いい加減法」（と命名します）

$x^2=7$、3 倍し $3x^2=3\cdot 7$、$8x$ を（いい加減）加え、$3x^2+8x=21+8x$,

$x(3x+8)=8x+21,\quad \dfrac{3x+8}{8x+21}=x$

から生まれた。なんて信じる学習者は世界に存在しない。

しかし、授業で「いい加減法」で導出される先生は存在しそう（嗚呼）。

$f(x)$ の導出過程をご教示ください.$f(x)$ の導出にこそ意味が在ると考えますので。」

＜以下のような考え方を返信した。＞

$x^2 = 7$ からはじめて、

両辺に n をかけて　$nx^2 = 7n$

続いて両辺に mx を加えて　$nx^2 + mx = mx + 7n$

従って、$f(x) = \dfrac{mx + 7n}{nx + m}$　とおくと、これは　$f(x) = x$ としたとき、$x = \pm\sqrt{7}$ を解に持つ。

では、どのように m, n を選ぶかであるが、係数行列 $\begin{pmatrix} m & 7n \\ n & m \end{pmatrix}$

の行列式が ± 1 となるようにする。（モジュラー変換）

すなわち　$m^2 - 7n^2 = \pm 1$ となるようにする。（どうして行列式が 1 となるようにするか、その理由は後で述べる。）

その最小自然数解は　$m = 8, n = 3$

従って $f(x) = \dfrac{8x + 21}{3x + 8}$ //

＜さらに＞

「また $\sqrt{[3}, \sqrt{61}, \sqrt{263}, \sqrt{431}, \sqrt{601}, \sqrt{773}, \sqrt{971}, \sqrt{1153}$　について、廣大の函数 $f(x)$ に相当する函数の導出を、遊び心で、お願い致します」

＜以下のように回答した＞

$\sqrt{D}$　の場合は、$f(x) = \dfrac{mx + Dn}{nx + m}$ であり、$m^2 - Dn^2 = \pm 1$ を満たすものを考える。

□ $\sqrt{3}$ の場合

$m^2 - 3n^2 = \pm 1$　から最小解は、$m = 2, n = 1$。従って、$f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$

□ $\sqrt{61}$ の場合

$m^2 - 61n^2 = \pm 1$

これは、暗算などでは解くのが難しい。そこで、以下の知識を使う。

◎「$\sqrt{D}$ の連分数展開を　$[q_0, \dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_k]$ （q_1 から q_k が最小の循環節）とする。

このとき

$x_0 = 1, x_1 = q_0, \quad x_{n+1} = q_n x_n + x_{n-1}$

$y_0 = 0, y_1 = 1, \quad y_{n+1} = q_n y_n + y_{n-1}$

とすると、ペル方程式　$x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小解は、$x = x_k, y = y_k$ で与えられる。」

D=61 の場合

$\sqrt{61}$ の連分数展開は、$[7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14]$

これから漸化式に従って計算して（表計算ソフトでやった）$x_{11} = 29718, y_{11} = 3805$

すなわち、$f(x) = \dfrac{29718x + 61 \cdot 3805}{3805x + 29718}$ となる。

※　$x = 8$ から $f(8), \quad f(f(8)), \quad f(f(f(8))), \cdots\cdots$ を表計算ソフトで数値を求めてみると、$\sqrt{61}$ にすぐ収束して行く様子が分かると思う。

※　$\sqrt{263}, \sqrt{431}, \sqrt{601}, \sqrt{773}, \sqrt{971}, \sqrt{1153}$ については、同様の計算でやってみてほしいと回答した。

＜係数行列の行列式を ± 1 となるように取る理由について＞

次の問題の解法から、理由を考えてみる。

問題　$f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+3}, \quad x_1 = 2, \quad x_{n+1} = f(x_n)$ とするとき、$\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

☆大学受験指導では、以下のような計算をする事を教えていたと思う。

「f(x)=x の解がα、βの 2 つであるならば、(f(x)-α)/(f(x)-β) を計算し、(x-α)/(x-β) と比べる」

（解答例）

$f(x) = x$ の解は、$x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ である。従って、次の計算をする。

$$\frac{\dfrac{3x+4}{2x+3} - \sqrt{2}}{\dfrac{3x+4}{2x+3} + \sqrt{2}} = \frac{(3-2\sqrt{2})x + (4-3\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})x + (4+3\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = (3-2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

これから、第 n 項について

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{x_1 - \sqrt{2}}{x_1 + \sqrt{2}}$$

ここで、$\left|\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから、$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$　$\cdots$ 答え

一般の $\sqrt{D}$ については、$f(x) = \dfrac{kx + Dm}{mx + k}$ を用いて考えると、上と同様に、

$$\frac{x_n - \sqrt{D}}{x_n + \sqrt{D}} = \left(\frac{k^2 - Dm^2}{k + m\sqrt{D}}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{x_1 - \sqrt{D}}{x_1 + \sqrt{D}}$$ が導かれ、$\sqrt{D}$ への収束が言える。

また、収束のためには、$k^2 - Dm^2 = \pm 1$ は必ずしも必要ではないが、その方が、収束が早いと思われる。