べき乗和の公式について（改訂版）

平成 26 年 9 月作成（平成 26 年 10 月改訂　平成 26 年 12 月タイプミス修正）
富山県教育委員会小中学校課　児童生徒育成係　　片山　喜美

べき乗和については、

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

となることを高校の教科書で扱っている。先ごろ、大学時代の友人の愛知県立国府高等学学校　鈴木康真先生から、これらのべき乗和の公式をパスカルの三角形を用いて求める方法について教えてもらった。それを機会に、自分なりに少し計算方法を考えてみた。試行錯誤の結果、次の計算方法にたどり着いた。かなり効率的に、速く計算できるのではないかと思う。

0.1　べき乗和の公式の係数計算方法　その 1

自然数の k 乗和は、

$$\sum_{m=1}^{n} m^k = f_k(n) = a_{k,k+1}n^{k+1} + a_{k,k}n^k + \cdots + a_{k,2}n^2 + a_{k,1}n$$

となり、その係数については、次の式が成り立つ。

計算方法その 1　べき乗和の公式の係数に関する漸化式

$$a_{k,l+1} = \frac{k}{l+1}a_{k-1,l}, \quad (l = 1, 2, \cdots k), \qquad a_{k,1} + a_{k,2} + \cdots + a_{k,k+1} = 1$$

少し計算してみる。
係数は以下のようになるが、それは簡単な計算で求められる。効率的に計算するために、係数を表にまとめる。1 段目から始めて、順に次の段が簡単な計算で求めていける。ある段の係数が完成したら、次の段の右下へ、$\dfrac{k}{l+1}$ をかけて数値を求めて行けばよい。暗算でだいたい行ける。
例えば、2 段目は 1 段目に $\dfrac{1}{l}$ を掛けて右下にずらすので、$a_{1,2} = \dfrac{1}{2}$ となり、$a_{1,1} = 1 - a_{1,2} = \dfrac{1}{2}$
同様に、3 段目は 2 段目に $\dfrac{2}{l}$　$(l = 2, 3)$ を掛けて右下にずらし、4 段目は 3 段目に $\dfrac{3}{l}$　$(l = 2, 3, 4)$ を掛けて右下にずらす。ただし、左端の項だけは、1 からその他のすべての項の値を差し引いて求める。

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_{0,l}$	1								
$a_{1,l}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
$a_{2,l}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$						
$a_{3,l}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$					
$a_{4,l}$	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$				
$a_{5,l}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$			
$a_{6,l}$	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$		
$a_{7,l}$	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	
$a_{8,l}$	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$
$\cdots$	$\cdots$								

表の係数をべき乗和の式に直すと、4 乗和から 8 乗和について、以下の公式を得る。

$$\sum_{m=1}^{n} m^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

計算の方法について

- $k=0$ について
  $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^0 = 1+1+\cdots+1 = n$
  従って、 $a_0, 1 = 1$
  あるいは、これは、公式の第 2 式 $a_{k,1}+a_{k,2}+\cdots+a_{k,k+1}=1$ に $k=0$ を代入してえられるとしてもよい。

- $k=1$ について
  $a_{1,2} = \dfrac{1}{2}a_{0,1} = \dfrac{1}{2}, \qquad a_{1,1} = 1 - a_{1,2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
  従って、$\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

- $k=2$ について
  $a_{2,l+1} = \dfrac{2}{l+1}a_{1,l}, \quad (l=1,2), \qquad a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}=1$ となるから、
  $a_{2,3} = \dfrac{2}{3}a_{1,2} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}, \qquad a_{2,2} = \dfrac{2}{2}a_{1,1} = \dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}, \qquad a_{2,1} = 1 - a_{2,3} - a_{2,2} = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$
  従って、$\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

以下同様に計算していけばよい。

上のように計算するよりも、先に述べたように、表を用いて、右下へ掛け算で数値を用いていくのが速い。やってみるとわかるが、半分ほどは 0 を右下にずらすので計算がいらないし、右端が $\dfrac{1}{k+1}$ で、右から 2 番目が $\dfrac{1}{2}$ に決まっている。

また、$a_{2m,l}$ の段を計算したのち、次の $a_{2m+1,l}$ の段を、左端以外計算し、それらをすべて足して 1 になるかどうかで、それら 2 段の計算があっているかどうかの 1 つのチェックになる。 $a_{2m+1,l}$ の段の左端が、必ず 0 になるのである。そうしたことに注意すれば、前ページの表を完成するには、そんなに時間がかからない。

係数 $a_{k,\ 1}$ の間に成り立つ関係式に辿り着くまでに、少し紆余曲折があった。最初は少し回り道をする導き方をしてからこの単純な式に辿り着いた。その後見直してみて、この関係式を極めて簡単に示すことができた。以下にその証明を述べる。

証明） $k+1$ 次多項式 $f_k(x)$ が $f_k(0)=0,\quad f_k(x)-f_k(x-1)=x^k$ を満たすとすると、

$$\sum_{m=1}^{n} m^k = \sum_{m=1}^{n}\{f_k(m)-f_k(m-1)\} = f_k(n)-f_k(0) = f_k(n)$$

とできる。したがって、この $f_k(x)$ を求めればよい。
$f_k(x)=a_{k,k+1}x^{k+1}+a_{k,k}x^k+\cdots+a_{k,2}x^2+a_{k.,1}x$ とおく。
$f_k(x)-f_k(x-1)=x^k$ の両辺に $x=1$ を代入して、 $f_k(1)-f_k(0)=1$
従って、 $\underline{a_{k,k+1}+a_{k,k}+\cdots+a_{k,2}+a_{k,1}=1}$
よって、上記第 2 式が示された。
次に、上式の両辺を微分して、$f_k'(x)-f_k'(x-1)=kx^{k-1}$
$x=1,2,\cdots,n$ を代入して和をとると

$$\{f_k'(1)-f_k'(0)\}+\{f_k'(2)-f_k'(1)\}+\cdots+\{f_k'(n)-f_k'(n-1)\}=k(1^{k-1}+2^{k-1}+\cdots+n^{k-1})$$

$$f_k'(n)-f_k'(0)=kf_{k-1}(n)$$

これがすべての自然数について成り立つことから、多項式として

$$f_k'(x)-f_k'(0)=kf_{k-1}(x)$$

が成立する。従って、

$$(k+1)a_{k,k+1}x^k+ka_{k,k}x^{k-1}+\cdots+2a_{k,2}x=k\left(a_{k-1,k}x^k+a_{k-1,k-1}+\cdots+a_{k-1,1}x\right)$$

x^l の係数を比較して、 $(l+1)a_{k,l+1}=ka_{k-1,l}$ $\qquad \underline{a_{k,l+1}=\dfrac{k}{l+1}a_{k-1,l}}$ （証明終）

0.2 べき乗和の公式の係数計算方法　その２

次数 k のべき乗和だけ公式を求めるには、次の計算方法が速い。
次数 k を固定するので、記号の簡易化のため、 先に用いた式で $a_{k,l}=a_l$ という風に、べき指数 k を省略する。

すなわち、 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^k = f_k(n)=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\cdots+a_2n^2+a_1n$ として、

計算方法その２　べき指数を固定した時の、べき乗和の公式の係数に関する漸化式

$$\sum_{m=j}^{k+1} {}_mC_{j-1}a_m = {}_kC_{j-1} \quad (j=1,2,\cdots,k+1)$$

証明は、後に述べることにする。
この方法の利点は、与えられた k について、 k 乗和の公式の係数を、 1 から k まで順次求めて行かなくてもよいことである。例えば、5 乗和に関する公式を求めるために、 1 〜 4 乗和を求める必要がない。すぐに 5 乗和の係数内に成り立つ公式で計算できるこということである。

計算例　k=5 について

- $j=6$
  ${}_6C_5a_6={}_5C_5 \qquad a_6=\dfrac{1}{6}$
- $j=5$
  ${}_5C_4a_5+{}_6C_4a_6={}_5C_4 \qquad 5a_5+\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\dfrac{1}{6}=5 \qquad a_5=\dfrac{1}{2}$

- $j=4$
  ${}_4C_3a_4 +_5 C_3a_5 +_6 C_3a_6 =_5 C_3 \qquad 4a_4+10\cdot\frac{1}{2}+\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{6}=10 \qquad 4a_4=10-5-\frac{10}{3}=\frac{5}{3}$
  $a_4=\frac{5}{12}$
- $j=3$
  ${}_3C_2a_3 +_4 C_2a_4 +_5 C_2a_5 +_6 C_2a_6 =_5 C_2 \qquad 3a_3+6\cdot\frac{5}{12}+10\cdot\frac{1}{2}+15\cdot\frac{1}{6}=10 \qquad 3a_3=10-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}$
  $a_3=0$
- $j=2$
  ${}_2C_1a_2+3C_1a_3 +_4 C_1a_4 +_5 C_1a_5 +_6 C_1a_6 =_5 C_1 \qquad 2a_2+3\cdot0+4\cdot\frac{5}{12}+5\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{6}=5$
  $2a_2=5-0-\frac{5}{3}-\frac{5}{2}-1=\frac{24-10-15}{6}=-\frac{1}{6} \qquad a_2=-\frac{1}{12}$
- $j=1$
  ${}_1C_0a_1 +_2 C_0a_2 +_3 C_0a_3 +_4 C_0a_4 +_5 C_0a_5 +_6 C_0a_6 =_5 C_0 \qquad a_1+\left(-\frac{1}{12}\right)+0+\frac{5}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$
  $a_1=1+\frac{1}{12}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=0 \qquad a_1=0$

従って、 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$

0.3 ベルヌイ数との関係

べき乗和の公式の係数は、ベルヌイ数で表されることが知られている。（そのことについては、後に述べる。）上で求めた係数と次の関係式を満たすことがわかる。

ベルヌイ数と係数 $a_{k,l}$ との関係

$$B_l=\frac{k+1}{{}_{k+1}C_l}\cdot a_{k,k+1-l} \quad (l\neq1,\,k\geqq l), \qquad B_1=-\frac{1}{2}$$

この関係式を用いれば、係数 $a_{k,l}$ の値からベルヌイ数を求めて行くことができる。
例えば、前節で計算した最下段の $a_{8,l} \quad (l=1,2,\cdots,9)$ により、 $B_0,B_1,\cdots,B_8$ が求められる。

$$B_l=\frac{9}{{}_9C_l}\cdot a_{8,9-l}$$

により計算する。

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8
${}_9C_l$	1	9	36	84	126	126	84	36	9
$9/{}_9C_l$	9	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{4}$	1
$a_{8,9-l}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{30}$
B_l	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$

ベルヌイ数自身が満たす漸化式からベルヌイ数を求め、それをもとにべき乗和の公式を求めて行くというのが普通であるのだろうが、逆に、前節の方法で係数を計算し、それからベルヌイ数を求めて行くことができる。

0.4 ゼータ関数の特殊値の計算への活用

無限級数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

によって定義されるゼータ関数は、 $s>1$ において絶対収束し、さらに全複素数平面に解析接続可能で、 $s=1$ に 1 位の極を持つ以外は正則であることが知られている。ゼータ関数の $s=2n,\quad (n\in\mathbb{N})$ における値は、有理数 $\times\pi^{2n}$ となる。例えば、

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2,\qquad \zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4$$

となることが、オイラーにより計算されている。
一般の $\zeta(2n)$ については、その有理数の部がベルヌイ数を用いて表されることが知られている。

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

前節で述べたように、まず、係数 $a_{k,l}$ を求めて、それを用いてベルヌイ数を計算できるので、それを上式に代入することにより、 $\zeta(2n)$ の値を求めることができる。でも、よく考えると、係数 $a_{k,l}$ からすぐにゼータ関数に行けばよい。

$$B_{2n}=\frac{k+1}{{}_{k+1}C_{2n}}\cdot a_{k,k+1-2n}\qquad (k\geqq 2n)$$

を上式に代入して、

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}\times\left\{\frac{k+1}{1}\cdot\frac{(k+1-2n)!\,(2n)!}{(k+1)!}\right\}a_{k,k+1-2n}\pi^{2n}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}(k+1-2n)!}{k!}a_{k,k+1-2n}\pi^{2n}$$

従って、次の公式を得る。

係数 $a_{k,l}$ を用いたゼータ関数の特殊値の計算

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}(k+1-2n)!}{k!}a_{k,k+1-2n}\pi^{2n}\qquad (n=1,2,3,\cdots,\quad k\geqq 2n)$$

$k=8$ とすると　$\zeta(8)$ までの値が計算できる。

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}(9-2n)!}{8!}a_{8,9-2n}\pi^{2n}\qquad (n=1,2,3,4)$$

- n=1

$$\zeta(2)=\frac{2\cdot 7!}{8!}a_{8,7}\pi^2=\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi^2=\frac{1}{6}\pi^2$$

- n=2

$$\zeta(4)=\frac{-2^3\cdot 5!}{8!}a_{8,5}\pi^4=\frac{-8}{7\cdot 6}\cdot\left(-\frac{7}{15}\right)\pi^4=\frac{1}{90}\pi^4$$

- n=3

$$\zeta(6)=\frac{2^5\cdot 3!}{8!}a_{8,3}\pi^6=\frac{2^5}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{2}{9}\pi^6=\frac{1}{7\cdot 3\cdot 5\cdot 9}\pi^6=\frac{1}{945}\pi^6$$

- n=4

$$\zeta(8)=\frac{-2^7}{8!}a_{8,1}\pi^8=\frac{-2^7}{7\cdot 3\cdot 5\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)\pi^8=\frac{1}{9450}\pi^8$$

これらの計算方法に至るまでの考察について、順次記載する。

1　高校の教科書における公式の求め方

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ については、初項 1、公差 1 の等差数列の和として求める。

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ については、恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ を用いて
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{(k+1)^3 - k^3\right\} = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$
  $\displaystyle(n+1)^3 - 1^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$
  このあと、左辺の展開及び右辺の第 2，３項の移項、整理を経て公式にたどり着く。そこそこ計算が必要である。

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ については、恒等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ を用いて、2 乗和の公式を求めたのと同様な計算で示す。ただし、この方法では手間がかかる。

2　パスカルの三角形を用いて求める方法

この方法は、鈴木康真先生の考察によるものである。
パスカルの三角形で、ある段の隣り合う 2 つの 2 項係数の和が、その下の段の 2 項係数となる。すなわち、${}_nC_{r-1} +_n C_r =_{n+1} C_r$ が成立する。

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ について

$$
\begin{array}{ccccccccc}
= & 1 & +2 & +3 & +4 & +\cdots\cdots & +n & & \\
= & {}_1C_1 & +{}_2C_1 & +{}_3C_1 & +{}_4C_1 & +\cdots\cdots & +{}_nC_1 & & \\
= & {}_2C_2 & +{}_2C_1 & +{}_3C_1 & +{}_4C_1 & +\cdots\cdots & +{}_nC_1 & & \\
= & & {}_3C_2 & +{}_3C_1 & +{}_4C_1 & +\cdots\cdots & +{}_nC_1 & & \\
= & & & {}_4C_2 & +{}_4C_1 & +\cdots\cdots & +{}_nC_1 & & \\
= & & & & +{}_5C_2 & +\cdots\cdots & +{}_nC_1 & & \\
= & & & & & \cdots\cdots & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
= & & & & & {}_nC_2 & +{}_nC_1 & & \\
= & & & & & & {}_{n+1}C_2 & = & \dfrac{1}{2}n(n+1)
\end{array}
$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ について、
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots\cdots + n \cdot (n+1)$
  $= 2 \times ({}_2C_2 +_3 C_2 +_4 C_2 +_5 C_2 + \cdots\cdots +_{n+1} C_2)$
  $= 2 \times ({}_3C_3 +_3 C_2 +_4 C_2 +_5 C_2 + \cdots\cdots +_{n+1} C_2)$
  $= \quad 2 \times (\ {}_4C_3 \quad +_4 C_2 +_5 C_2 + \cdots\cdots +_{n+1} C_2)$
  $= \qquad 2 \times (\quad {}_5C_3 \quad +_5 C_2 + \cdots\cdots +_{n+1} C_2)$
  $\cdots\cdots$
  $\cdots\cdots$

$= \qquad 2 \times {}_{n+2}C_3 = 2 \times \dfrac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$

従って、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ について、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + 4\cdot5\cdot6 + \cdots\cdots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$

$= 3! \times ({}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + \cdots\cdots + {}_{n+2}C_3)$

$= 3! \times ({}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + \cdots\cdots + {}_{n+2}C_3)$

$= \qquad 3! \times ({}_5C_4 \quad + {}_5C_3 + {}_6C_3 + \cdots\cdots + {}_{n+2}C_3)$

$= \qquad\qquad 3! \times (\quad {}_6C_4 \quad + {}_6C_3 + \cdots\cdots + {}_{n+2}C_3)$

$\cdots\cdots$

$\cdots\cdots$

$= \qquad 3! \times {}_{n+3}C_4 = 3! \times \dfrac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$

従って、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \times \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \dfrac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3) - 2(2n+1) - 4\} = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ について、

上記と同様に

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = 4! \times {}_{n+4}C_5 = 4! \times \frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

従って、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 + 6\sum_{k=1}^{n} k^3 + 11\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - 6 \times \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 11 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 6 \times \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \dfrac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4) - 45n(n+1) - 55(2n+1) - 90\}$

$= \dfrac{1}{30}n(n+1)\{6(n^3+9n^2+26n+24) - 45(n^2+n) - 55(2n+1) - 90\}$

$= \dfrac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1) = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

3 別の恒等式を用いる方法との関連

3.1 $k(k+1)\times\cdots\times(k+r) - (k-1)k\times\cdots\times(k+r-1) = (r+1)k(k+1)\cdots(k+r-1)$ の利用

鈴木先生から教えてもらった時に、思い起こしたのは以下の恒等式を利用した計算法であった。

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ について
  $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)$ より（この変形は、右辺を $k(k+1)$ でくくることで簡単に得られる）
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0\}$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ について
  $k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)=4k(k+1)(k+2)$ より
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3+3\sum_{k=1}^{n} k^2+2\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{4}\{n(n+1)(n+2)(n+3)-0\}$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\frac{1}{2}n(n+1)$
  $\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-2(2n+1)-4\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ について
  $k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)=5k(k+1)(k+2)(k+3)$ より
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4+6\sum_{k=1}^{n} k^3+11\sum_{k=1}^{n} k^2+6\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{5}\{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-0\}$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-6\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-11\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\frac{1}{2}n(n+1)$
  $\displaystyle=\frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)-45(n+2)(n+3)-55(2n+1)-90\}$
  $\displaystyle=\frac{1}{30}n(n+1)\{6n^3+9n^2+n-1\}=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

3.2 二項係数による表現へ

さて、これらの計算に用いた恒等式を、鈴木先生に教わった方法と照らし合わせると、二項係数で表せることに気付いた。すなわち

- $k(k+1)-(k-1)k=2k$ は、二項係数で表すと、$2!\times({}_{k+1}C_2-{}_kC_2)=2\times{}_kC_1$
  ただし、 $n<r$ のときには、 ${}_nC_r=0$ とする。
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=1}^{n}{}_kC_1=\sum_{k=1}^{n}({}_{k+1}C_2-{}_kC_2)={}_{n+1}C_2-{}_1C_2=\frac{1}{2}n(n+1)$

- ${}_{k+2}C_3-{}_{k+1}C_3={}_{k+1}C_2$ より
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=2\sum_{k=1}^{n}{}_{k+1}C_2=2\sum_{k=1}^{n}({}_{k+2}C_3-{}_{k+1}C_3)=2({}_{n+2}C_3-{}_2C_3)=2\times\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3.3　一般形へ

${}_{k+r-1}C_r = {}_{k+r}C_{r+1} - {}_{k+r-1}C_{r+1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k+r-1}C_r = \sum_{k=1}^{n} ({}_{k+r}C_{r+1} - {}_{k+r-1}C_{r+1}) = {}_{n+r}C_{r+1} - {}_{r}C_{r+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k+r-1}C_{r+1} = {}_{n+r}C_{r+1}$$

これを整理して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+r)}{(r+1)!} - 0 \qquad ({}_{r}C_{r+1} = 0)$$

従って、

連続する r 個の数の和

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+r-1) = \frac{1}{r+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)$$

この式に、 $r = 1, 2, 3, \cdots$ を順に代入して、べき乗和を求めていける。
今回、鈴木先生の考察を見て、これまで使っていた恒等式が、パスカルの三角形から出てくる二項係数の式だったことに気が付いた。

4　計算の工夫

4.1　階差が n^r となるように ⋯ 展開式を用いて

前節までの計算では、例えば、$\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めるには、$\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, を順次計算していかなければならない。そして、その結果を代入し、差し引きするのに手間がかかる。その理由は、階差が $n(n+1)\cdots(n+r-1)$ の形であることにある。階差が n^r となっていれば計算が速い。そこで、

階差が n^r となるように

$$f(0) = 0, \qquad f(n) - f(n-1) = n^r$$

を満たす $f(n)$ を求めると、それが求める答となる。
なぜなら、$\sum_{k=1}^{n} n^r = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \{f(k) - f(k-1)\} = f(n)$ であるから。

- $f(n) - f(n-1) = n$ を満たす $f(n)$ について
  $f(n) = an^2 + bn$ として $(an^2 + bn) - \{a(n-1)^2 + b(n-1)\} = n$
  その係数だけ取り出して計算すると

$f(n)$	|	a	b	
$-a(n-1)^2$	|	$-a$	$2a$	$-a$
$-b(n-1)$	|		$-b$	b
			$2a$	$-a+b$

従って、$\begin{cases} 2a = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases}$ $\qquad a = \dfrac{1}{2}, \quad b = \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

- $f(n) - f(n-1) = n^2$ を満たす $f(n)$ について
  $f(n) = an^3 + bn^2 + cn$ として $(an^3 + bn^2 + cn) - \{a(n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1)\} = n^2$

$$\begin{array}{c|cccc}
f(n) & a & b & c & \\
-a(n-1)^3 & -a & 3a & -3a & a \\
-b(n-1)^2 & & -b & 2b & -b \\
-c(n-1) & & & -c & c \\
\hline
 & & 3a & -3a+2b & a-b+c
\end{array}$$

従って、$\begin{cases} 3a = 1 \\ -3a + 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$ $\qquad a = \dfrac{1}{3}, \quad b = \dfrac{1}{2}, \quad c = -a + b = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

- $f(n) - f(n-1) = n^3$ を満たす $f(n)$ について
  慣れてきたら、すぐに係数の計算に進んで

$$\begin{array}{c|ccccc}
f(n) & a & b & c & d & \\
-a(n-1)^4 & -a & 4a & -6a & 4a & -a \\
-b(n-1)^3 & & -b & 3b & -3b & b \\
-c(n-1)^2 & & & -c & 2c & -c \\
-d(n-1) & & & & -d & d \\
\hline
 & & 4a & -6a+3b & 4a-3b+2c & -a+b-c+d
\end{array}$$

従って、$\begin{cases} 4a = 1 \\ -6a + 3b = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases}$

$a = \dfrac{1}{4}, \quad b = \dfrac{1}{2}, \quad c = -2a + \dfrac{3}{2}b = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}, \quad d = a - b + c = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

- $f(n) - f(n-1) = n^4$ を満たす $f(n)$ について
  さらに慣れると、すぐに連立方程式に進める。縦に見て、係数が二項展開となっているのである。

$$\begin{cases}
\begin{array}{rrrrrl}
5a & & & & & = 1 \\
-10a & +4b & & & & = 0 \\
10a & -6b & +3c & & & = 0 \\
-5a & +4b & -3c & +2d & & = 0 \\
a & -b & +c & -d & +e & = 0
\end{array}
\end{cases}$$

$a=\dfrac{1}{5},\quad b=\dfrac{10}{4}a=\dfrac{1}{2},\quad c=-\dfrac{10}{3}a+2b=-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{1}{3},\quad d=\dfrac{5}{2}a-2b+\dfrac{3}{2}c=\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{1}{2}=0$
$e=-a+b-c+d=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+0=-\dfrac{1}{30}$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n=\frac{1}{30}n(6n^4+15n^3+10n^2-1)=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

- 一般に $f(n)=a_{r+1}n^{r+1}+a_rn^r+\cdots+a_1n,\qquad f(n)-f(n-1)=n^r$ については、
  係数の連立方程式が以下となる。

$$\begin{cases}
{}_{r+1}C_1\,a_{r+1} & & & & & & & & =1\\
-{}_{r+1}C_2\,a_{r+1} & +{}_rC_1\,a_r & & & & & & & =0\\
{}_{r+1}C_3\,a_{r+1} & -{}_rC_2\,a_r & +{}_{r-1}C_1\,a_{r-1} & & & & & & =0\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & & & & & & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & & & & & & & \\
(-1)^r\,{}_{r+1}C_{r+1}\,a_{r+1} & +(-1)^{r-1}\,{}_rC_r\,a_r & +(-1)^{r-2}\,{}_{r-1}C_{r-1}\,a_{r-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & +{}_1C_1a_1 & =0
\end{cases}$$

行列で表すと

$$\begin{pmatrix}
{}_{r+1}C_1 & & & & & & & \\
-{}_{r+1}C_2 & {}_rC_1 & & & & & & \\
{}_{r+1}C_3 & -{}_rC_2 & {}_{r-1}C_1 & & & & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & & & & & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & & & & & & \\
(-1)^r\,{}_{r+1}C_{r+1} & (-1)^{r-1}\,{}_rC_r & (-1)^{r-2}\,{}_{r-1}C_{r-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {}_1C_1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{r+1}\\ a_r\\ a_{r-1}\\ \cdots\\ \cdots\\ a_1\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\cdots\\\cdots\\0\end{pmatrix}$$

この三角行列について、うまく逆行列を作れる方法があるとよいのだが。

4.2　微分を用いた係数の計算

前節と同様ではあるが、係数を微分と数値代入で求める。
この方法が、冒頭の「計算方法　その２」を導いたものである。考察の経過では、「計算方法　その１」の方が後にえられたものであった.。

- $f(x)-f(x-1)=x$ について
  - $(ax^2+bx)-\{a(x-1)^2+b(x-1)\}=x$
    x=1 を代入して、$a+b=1$
  - 微分して、$(2ax+b)-\{2a(x-1)+b\}=1$
    x=1 を代入して、$2a=1$

  よって　$a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$。従って、$f(n)=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$
- $f(x)-f(x-1)=x^2$ について
  - $(ax^3+bx^2+cx)-\{a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)\}=x^2$
    x=1 を代入して、$a+b+c=1$
  - 微分して、$(3ax+2b+c)-\{3a(x-1)^2+2b(x-1)+c\}=2x$
    x=1 を代入して、$3a+2b=2$
  - さらに微分して、$(3\cdot 2ax+2b)-\{3a(x-1)+2b\}=2$
    x=1 を代入して、$3\cdot 2a=2$

よって　$a=\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{1}{6}$。従って、$f(n)=\dfrac{1}{3}n^3+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n$

- $f(x)-f(x-1)=x^3$ について
  上記の計算から法則を掴んで、 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$ の係数に関する連立方程式は以下のようになることがわかる。
  $$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 4a+3b+2c=3 \\ 4\cdot 3a+3\cdot 2b=3\cdot 2 \\ 4\cdot 3\cdot 2a=3\cdot 2 \end{cases}$$
  よって、$a=\dfrac{1}{4},\quad b=1-2a=\dfrac{1}{2},\quad c=\dfrac{3}{2}-2a-\dfrac{3}{2}b=\dfrac{3}{2}-1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$
  $d=1-a-b-c=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=0$
  従って、$f(n)=\dfrac{1}{4}n^4+\dfrac{1}{2}n^3+\dfrac{1}{4}n^2$

- $f(x)-f(x-1)=x^4$ について
  同様に、 $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex$ の係数に関する連立方程式は以下のようになることがわかる。
  $$\begin{cases} a+b+c+d+e=1 \\ 5a+4b+3c+2d=4 \\ 5\cdot 4a+4\cdot 3b+3\cdot 2c=4\cdot 3 \\ 5\cdot 4\cdot 3a+4\cdot 3\cdot 2b=4\cdot 3\cdot 2 \\ 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a=4\cdot 3\cdot 2 \end{cases}$$
  よって、$a=\dfrac{1}{5},\quad b=1-\dfrac{5}{2}a=\dfrac{1}{2},\quad c=2-\dfrac{10}{3}a-2b=2-\dfrac{2}{3}-1=\dfrac{1}{3}$
  $d=2-\dfrac{5}{2}a-2b-\dfrac{3}{2}c=2-\dfrac{1}{2}-1-\dfrac{1}{2}=0$
  $e=1-a-b-c-d=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{30-6-15-10}{30}=-\dfrac{1}{30}$
  従って、$f(n)=\dfrac{1}{5}n^5+\dfrac{1}{2}n^4+\dfrac{1}{3}n^3-\dfrac{1}{30}n$

  この方法による計算は、高校の教科書で扱っている導出法や、
  恒等式 $k(k+1)\cdots(k+r)-(k-1)k\cdots(k+r-1)=(r+1)k(k+1)\cdots(k+r-1)$
  を利用した方法に比べて、はるかに速く結論に至る。

- 一般に $f(n)=a_{r+1}n^{r+1}+a_rn^r+\cdots+a_1n,\qquad f(n)-f(n-1)=n^r$ については、
  係数の連立方程式が以下となる。

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} a_{r+1} & +a_r & +a_{r-1} & +\cdots\cdots & +a_3 & +a_2 & +a_1 & =1 \\ (r+1)a_{r+1} & +ra_r & +(r-1)a_{r-1} & +\cdots\cdots & +3a_3 & +2a_2 & & =r \\ (r+1)\cdot ra_{r+1} & +r\cdot(r-1)a_r & +(r-1)\cdot(r-2)a_{r-1} & +\cdots\cdots & +3\cdot 2a_3 & & & =r\cdot(r-1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & & & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & & & & \\ (r+1)\cdot r\cdots 2a_{r+1} & & & & & & & =r! \end{array}\right.$$

この連立方程式は、単純な法則で作られており、前節のものに比べてなかなかきれいな形である。
これも行列（三角行列）による表現から、上手い計算に結びつのかどうか。

少し試行錯誤したのち、上の連立方程式の j 段目の両辺を $(j-1)!$ で割るときれいな形、すなわち

計算方法その２　べき指数を固定した時の、べき乗和の公式の係数に関する漸化式

$$\sum_{m=j}^{k+1} {}_mC_{j-1}a_m = {}_kC_{j-1} \quad (j=1,2,\cdots,k+1)$$

を得ることができた。

ここまでの考察では、べき次数を固定して考えている。例えば、5 乗和の計算はべきが 5 のものだけで計算できる。その方がべき 1 ～ 4 の計算をして、それをもとにべき 5 の公式を導くより早いだろうと考えていた。

しかし、べきをまたいで考える方が、ある面計算が簡略になるこということもある。それが、冒頭に述べた「計算方法　その 1 」である。ただし、そのことに最初に思いが至ったのは、ベルヌイ数を用いた表現と比較をしたことによる。

4.3　係数にかかわるコメント

これまでの計算から以下のことがわかる。

(1) 最高次の係数は $\dfrac{1}{r+1}$ である。
4.1 節の方法では、 ${}_{r+1}C_1\, a_{r+1} = 1$ 、4.2 節の方法では、$(r+1)!\, a_{r+1} = r!$ が得られており、いずれも $a_{r+1} = \dfrac{1}{r+1}$ となる。//

(2) 2 番目の項の係数は $\dfrac{1}{2}$ である。
4.1 節の方法では、 $-{}_{r+1}C_2\, a_{r+1} + {}_rC_1\, a_r = 0$ であるから、$-\dfrac{(r+1)r}{2!}\cdot\dfrac{1}{r+1} + r\cdot a_r = 0$ 、従って、$a_r = \dfrac{1}{2}$
4.2 節の方法では、$(r+1)r\cdots 3\, a_{r+1} + r!\cdot a_r = r!$ であるから、$a_r = 1 - \dfrac{(r+1)r\cdots 3}{r!}\cdot\dfrac{1}{r+1} = \dfrac{1}{2}$ //

(3) べき乗和の公式は、 $n(n+1)$ で割り切れる。
n で割り切れることは自明。また、4.1 節で得られた連立方程式の最終行は、
$(-1)^r\, a_{r+1} + (-1)\, a_r + \cdots - a_2 + a_1 = 0$ を表しており、$f(-1) = 0$ となるので $f(n)$ は $n+1$ を因子に持つ。//

5　べき乗和の公式に関する歴史など

少し調べてみたところ、pisan-dub.jp という方のホームページに以下の記述がある。
ただし、 $P_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ とする。

「この一般公式を求めようとした最初の仕事は 1631 年にファウルハーバーが出版した「Academia Algebrae」に見ることができます。これは $P_k(n)$ が k が奇数のときには $P_1(n)$ の多項式で書け、k が偶数のときには $P_1(n)$ の多項式と $P_2(n)$ の積で書けるというものです。これは後にヤコビが再発見して、厳密な証明を与えています。

パスカルは 1665 年に出版された「算術三角形論」において k 次の冪和を k- 1 次以下の冪和を使って計算する公式を与えています。

冪和の一般公式がベルヌーイ数と呼ばれている数を使って n の多項式として明示的に書き下されたのは 1712 年の関孝和の遺稿「括要算法」においてでした。これは関孝和の遺稿を、荒木村英とその弟子である

大高由昌がまとめて出版したものですが、建部賢弘・賢明兄弟がまとめ「大成算經」にも同じ内容が含まれています。

その翌年にまったく同じ公式がヤコブ・ベルヌーイの遺稿集「推測法」において発表されています。これはヤコブ・ベルヌーイの遺稿を甥のニコラウスがまとめて出版したものです。」

5.1 パスカルの公式

４節で考察した時には、指数は一定のもので考えたので、$k+1$ 次多項式に $f(x)$ という記号を使い、$f(0)=0,\ f(x)-f(x-1)=x^k$ を満たすものとした。それから $f(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ が得られる。

ここでは異なる指数の公式の間の関係式を扱うので、多項式の記号の中に指数も用いて

$$f_k(x)=a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+\cdots+a_1x$$

と表すことにする。

$$(j+1)^{k+1}-j^{k+1}=\sum_{m=0}^{k}{}_{k+1}C_m j^m$$

の両辺を $j=1,2,\cdots n$ について和をとって

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{(j+1)^{k+1}-j^{k+1}\right\}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{k}{}_{k+1}C_m j^m$$

$$\text{左辺}=(n{+}1)^{k+1}{-}1 \qquad \text{右辺}=\sum_{m=0}^{k}\left({}_{k+1}C_m\sum_{j=1}^{n}j^m\right)=\sum_{m=0}^{k}{}_{k+1}C_m f_m(n)=(k{+}1)f_k(n){+}\sum_{m=0}^{k-1}{}_{k+1}C_m f_m(n)$$

従って、

パスカルの公式

$$f_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{(n+1)^{k+1}-1-\sum_{m=0}^{k-1}{}_{k+1}C_m f_m(n)\right\}$$

高校の教科書の方法は、この公式（その導入）に従ったものである。

5.2 ベルヌイ数による表現

4.2 節で考察した方法に関連する。

$f_k(x)-f_k(x-1)=x^k$ の両辺を微分して、

$f_k^{(1)}(x)-f_k^{(1)}(x-1)=kx^{k-1}$ 　この両辺を $j=1,2,\cdots n$ について和をとって

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{f_k^{(1)}(j)-f_k^{(1)}(j-1)\right\}=k\sum_{j=1}^{n}j^{k-1}$$

$$f_k^{(1)}(n)-f_k^{(1)}(0)=k\,f_{k-1}(n)$$

これがすべての自然数 n について成り立つことから、多項式として、以下が成り立つ。

$$f_k^{(1)}(x)-f_k^{(1)}(0)=k\,f_{k-1}(x)$$

この両辺を微分し、 $x=0$ を代入する.。

$$f_k^{(2)}(x)-0=k\,f_{k-1}^{(1)}(x), \qquad f_k^{(2)}(0)=k\,f_{k-1}^{(1)}(0)$$

もう一度微分と代入をすると

$$f_k^{(3)}(x) = k\, f_{k-1}^{(2)}(x) = k(k-1)\, f_{k-2}^{(1)}(x), \qquad f_k^{(3)}(0) = k(k-1)\, f_{k-2}^{(1)}(0)$$

以下同様にして、

$$f_k^{(r)}(0) = k(k-1)\cdots(k-r+2) f_{k-r+1}^{(1)}(0) \quad (2 \leqq r \leqq k+1)$$

多項式を $f_k(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x$ とすると、$a_r = \dfrac{f_k^{(r)}(0)}{r!}$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{r!}\, f_{k-r+1}^{(1)}(0) \\ &= \frac{1}{k+1}\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\{(k+1)-r+1\}}{r!}\, f_{k-r+1}^{(1)}(0) \\ &= \frac{1}{k+1}\cdot {}_{k+1}C_r\, f_{k-r+1}^{(1)}(0) \qquad (2 \leqq r \leqq k+1) \end{aligned}$$

また、 $a_1 = f_k^{(1)}(0)$ であるが、上式に $r=1$ を代入すると

$$\text{右辺} = \frac{1}{k+1}\cdot {}_{k+1}C_1 f_{k-1+1}^{(1)}(0) = \frac{1}{k+1}\cdot(k+1) f_k^{(1)}(0) = f_k^{(1)}(0)$$

すなわち、上式は $r=1$ の時も成り立つ。従って、

$$f_k(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{r=1}^{k+1} {}_{k+1}C_r\, f_{k-r+1}^{(1)}(0) x^r = \frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r\, f_r^{(1)}(0) x^{k-r+1}$$

ここで、$f_r^{(1)}(0) = b_r$ とおくと,

ベルヌイ数による表現

$$f_k(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r\, b_r x^{k-r+1}$$

ただし、一般にベルヌイ数というと $B_n = b_n\, (n \neq 1), \quad B_1 = -b_1$ を満たす $\{B_n\}$ をいう。

$x=1$ を代入して、$f_k(1) = 1^k = 1$ より、

$$1 = \frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r\, b_r, \qquad k+1 = \sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r\, b_r$$

以下で $\{b_r\}$ を順次求めていく。

- $k=1$ を代入
  $2 =_2 C_0 b_0 +_2 C_1 b_1$
  ここで $f_0(n) = 1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ より、 $f_0(x) = x, \quad f_0^{(1)}(x) = 1$
  よって、$b_0 = f_0^{(1)}(0) = 1, \qquad 2 = 1 + 2b_1, \quad b_1 = \dfrac{1}{2}$
- $k=2$ を代入
  $3 =_3 C_0 b_0 +_3 C_1 b_1 +_3 C_2 b_2, \quad b_2 = 1 - \dfrac{1}{3}\cdot 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$
- $k=3$ を代入
  $4 =_4 C_0 b_0 +_4 C_1 b_1 +_4 C_2 b_2 +_4 C_3 b_3$

  $b_3 = 1 - \dfrac{1}{4}\cdot 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{4}\cdot\dfrac{1}{6} = 0$

- $k=4$ を代入
  $5 = {}_5C_0 b_0 + {}_5C_1 b_1 + {}_5C_2 b_2 + {}_5C_3 b_3 + {}_5C_4 b_4$

  $$b_4 = 1 - \frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{2} - \frac{10}{5}\cdot\frac{1}{6} - \frac{10}{5}\cdot 0 = \frac{30-6-15-10}{30} = -\frac{1}{30}$$

これらを用いて、べき乗和の公式を導く

- $k=1$
  $$f_1(n) = \frac{1}{2}\left({}_2C_0 b_0 n^2 + {}_2C_1 b_1 n\right) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 2\cdot\frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{n}$$
- $k=2$
  $$f_2(n) = \frac{1}{3}\left({}_3C_0 b_0 n^3 + {}_3C_1 b_1 n^2 + {}_3C_2 b_2 n\right) = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\cdot\frac{1}{2}n^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$
- $k=3$
  $$\begin{aligned} f_3(n) &= \frac{1}{4}\left({}_4C_0 b_0 n^4 + {}_4C_1 b_1 n^3 + {}_4C_2 b_2 n^2 + {}_4C_3 b_3 n\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(n^4 + 4\cdot\frac{1}{2}n^3 + 6\cdot\frac{1}{6}n^2 + 4\cdot 0\cdot n\right) \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}$$
- $k=4$
  $$\begin{aligned} f_4(n) &= \frac{1}{5}\left({}_5C_0 b_0 n^5 + {}_5C_1 b_1 n^4 + {}_5C_2 b_2 n^3 + {}_5C_3 b_3 n^2 + {}_5C_4 b_4 n\right) \\ &= \frac{1}{5}\left\{n^5 + 5\cdot\frac{1}{2}n^4 + 10\cdot\frac{1}{6}n^3 + 10\cdot 0\cdot n^2 + 5\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \end{aligned}$$

5.3 係数 $a_{k,l}$ の間に成り立つ関係式

$$f_k(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r\, b_r x^{k-r+1}$$

及び、

$$f_k(n) = a_{k,k+1}n^{k+1} + a_{k,k}n^k + \cdots + a_{k,2}n^2 + a_{k,.,1}n$$

を比較して、

$$\frac{1}{k+1}{}_{k+1}C_r \cdot b_r = a_{k,k-r+1}$$

次数を 1 つずらして、

$$\frac{1}{k}{}_kC_r \cdot b_r = a_{k-1,k-r}$$

この 2 つの式から

$$b_r = \frac{k+1}{{}_{k+1}C_r}\cdot a_{k,k-r+1} = \frac{k}{{}_kC_r}\cdot a_{k-1,k-r}$$

$$a_{k,k-r+1} = \frac{{}_{k+1}C_r}{k+1}\cdot\frac{k}{{}_kC_r}\cdot a_{k-1,k-r} = \frac{(k+1)!}{(k+1)\cdot r!\cdot(k-r+1)}\cdot\frac{k\cdot r!\cdot(k-r)!}{k!}\cdot a_{k-1,k-r} = \frac{k}{k-r+1}a_{k-1,k-r}$$

$k-r=l$ とおいて、

係数が満たす関係式

$$a_{k,l+1} = \frac{k}{l+1}a_{k-1,l}$$

「計算方法　その 1」は、最初、このような考察から得たのであった。

5.4　補足：ベルヌイ数について

前節で用いた数列 $\{b_r\}$ については、 $B_1 = -b_1 = -\dfrac{1}{2}$ 、それ以外は $B_r = b_r$ とした数列 $\{B_r\}$ が、室はベルヌイ数になるのである。

ベルヌイ数の定義としてよく見かけるのは、母関数を用いた以下の方法である。

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

という Taylor 展開の係数としてベルヌイ数 $\{B_r\}$ を定義する。

$f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$ とおいて、この係数が満たす性質についていくつか調べる。

- $B_0 = 1,\, B_1 = -\dfrac{1}{2}$

  証明） $f(t) = \dfrac{t}{t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2!}t + \frac{1}{3!}t^2 + \cdots} = 1 - \dfrac{1}{2}t + \cdots$

  従って、 $B_0 = 1,\, B_1 = -\dfrac{1}{2}$　//

- $k \geqq 1$ のとき、 $B_{2k+1} = 0$

  証明）$f(-t) = \dfrac{-t}{e^{-t} - 1} = \dfrac{-te^t}{1 - e^t} = \dfrac{te^t}{e^t - 1} = \dfrac{t(e^t - 1) + t}{e^t - 1} = t + f(t)$

  従って、 $1 - \dfrac{1}{2}(-t) + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(-t)^n = t + \left(1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\right)$

  両辺の t^{2k+1} の係数を比較して、$-B_{2+1} = B_{2k+1}$ となるから、 $B_{2k+1} = 0$　//

- ベルヌイ数は次の漸化式を満たす。

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r B_r = 0$$

  証明）上の式変形から

$$f(-t) = \frac{t}{e^t - 1} \times e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!}\right) t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!}\right) t^n$$

  t^{n+1} の係数を比較して

$$\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_k}{k!(n+1-k)!}, \qquad (-1)^{n+1} B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} B_k$$

$$(-1)^{n+1} B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k B_k, \qquad (-1)^{n+1} B_{n+1} = B_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_k B_k$$

  n が奇数のときは、両辺の B_{n+1} が打ち消しあう。また、n が偶数のときは、両辺の B_{n+1} が 0 である。従って、

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_k B_k = 0 \quad //$$

- 前節で用いた $\{b_r\}$ は、$b_1 = -B_1$ で、それ以外は $b_r = B_r$ を満たす。
証明）$b_0 = B_0 = 1$ で $r = 0$ のときは、成り立っている。
$\{b_r|$ について成り立っていた漸化式は、

$$k + 1 = \sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r\, b_r$$

ここで、$b_1 = \dfrac{1}{2}$ であったので、上式を次のように変形できる。

$$(k+1)\cdot 2 \cdot b_1 = b_0 + (k+1)b_1 + \sum_{r=2}^{n} {}_{k+1}C_r\, b_r$$

従って、

$$b_0 - (k+1)b_1 + \sum_{r=2}^{n} {}_{k+1}C_r\, b_r = 0$$

$B'_1 = -b_1, \quad B'_r = b_r \quad (n \neq 1)$ とおくと、

$$B'_0 + (k+1)C_1 + \sum_{r=2}^{n} {}_{k+1}C_r\, B'_r = 0$$

すなわち、

$$B'_0 = 1, \qquad \sum_{r=0}^{k} {}_{k+1}C_r B'_r = 0$$

同じ漸化式を満たすことから、$B_r = B'_r$ がすべての r について成り立つ。//
ここまでのことをまとめて、
<u>べき乗和の公式は、ベルヌイ数を用いて求めることができる。</u>

5.5 ベルヌイ数とゼータ関数の特殊値

ベルヌイ数については、次のことがよく知られている。

- ゼータ関数の $s = 2n$ のときの特殊値について

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $n = 1$

$$\zeta(2) = \frac{2^1 B_2}{(2)!}\pi^2 = \frac{1}{6}\pi^2$$

(2) $n = 2$

$$\zeta(4) = \frac{-2^3 B_4}{(4)!}\pi^4 = \frac{-8\cdot\left(-\dfrac{1}{30}\right)}{24}\pi^4 = \frac{1}{90}\pi^4$$

- ゼータ関数の負の整数値における値について、次が成り立つ。

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

6　おまけ：ゼータ関数の特殊値に関する片山の公式

$\zeta(2n) = a_n \pi^{2n}$ とするとき、その係数について、次の漸化式が成り立つ

片山の公式　1984 年

$$a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}a_k$$

計算してみる。

- n=2

$$a_2 = (-1)\frac{2}{5!} - \frac{-1}{(4-2+1)!}\frac{1}{6} = -\frac{2}{5!} + \frac{1}{3!\cdot 6} = \frac{-12+20}{5!\cdot 6} = \frac{1}{5\cdot 3\cdot 1\cdot 6} = \frac{1}{90}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

- n=3

$$a_3 = \frac{3}{7!} - \frac{1}{5!}\frac{1}{6} + \frac{1}{3!}\frac{1}{90} = \frac{9-21+28}{3\cdot 7!} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 3\cdot 7} = \frac{1}{945}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

この公式でゼータ関数の値は、比較的速く計算することが可能である。