数列に関するいくつかの話題について

平成 25 年夏

富山県立高岡高等学校　片山　喜美

目 次

1　等差 × 等比 を一般項とする数列の和の計算方法について

和に等比数列の部分の公比をかけたものを差し引き、現れた等比数列に和の公式を適用するのが標準的な計算方法であるが、素早く正確に計算できるのではという方法について少し考察してみた。

1. 教科書にある標準的な計算法

数列の和　$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + nx^{n-1}$　$(x \neq 1)$　について

標準的な計算法は、

$$\begin{array}{rrrrrlrr}
 & S = & 1 & +2x & +3x^2 + \cdots\cdots\cdots & & +nx^{n-1} & \\
-) & -xS = & & x & +2x^2 + \cdots\cdots\cdots & +(n-1)x^{n-1} & & +nx^n \\
\hline
 & S - xS = & 1+ & x & +x^2 + \cdots\cdots\cdots & & +x^{n-1} & -nx^n
\end{array}$$

従って、

$$(1-x)S = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n = \frac{(1-x^n) - nx^n(1-x)}{1-x} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x}$$

よって、$S = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ となる

この計算の注意事項としては、$S - xS$ の計算の右辺で

- 最後の $-nx^n$ の符号がマイナスではなく、プラスと間違えないこと。
- $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ を等比数列の和であると認識し、和の公式を適用すること。初項と公比及び項数を押さえる。
- 和の公式で $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ を使ったとすれば、最後に $\dfrac{-1 + (n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)(x-1)}$ という中途半端な式で終わらないこと。

といったことが揚げられる、

2. 工夫してみた計算法

平成 24 年度の秋、公開授業でこの題材を解説しているのを見ていて、ふと、以下のようなもう一度 x をかけて差し引く計算はどうだろうかと考えた。

$$\begin{array}{rrrrrlrrr}
 & S = & 1 & +2x & +3x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +nx^{n-1} & & \\
-) & xS = & & x & +2x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +(n-1)x^{n-1} & +nx^n & \\
\hline
 & (1-x)S = & 1 & +x & +x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +x^{n-1} & -nx^n & \\
-) & x(1-x)S = & & x & +x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +x^{n-1} & +x^n & -nx^{n+1} \\
\hline
 & (1-2x+x^2)S = & 1 & & & & & -(n+1)x^n & +nx^{n+1}
\end{array}$$

よって、$S = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ とできる。

この計算方法では、上記注意事項の２、３番目は上手く回避できる。
いくつかの例で比較してみる。

例　$S = 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1}$　$(x \neq 1)$

- 教科書にある標準的な計算法

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & S = & 1 & +3x & +5x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +(2n-1)x^{n-1} & \\
-) & xS = & & x & +3x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +(2n-3)x^{n-1} & +(2n-1)x^n \\
\hline
 & (1-x)S = & 1 & +2x & +2x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +2x^{n-1} & -(2n-1)x^n
\end{array}$$

従って、

$$\begin{aligned}(1-x)S &= 2+2x+2x^2+\cdots\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n-1\\ &= \frac{2(1-x^n)}{1-x}-(2n-1)x^n-1\\ &= \frac{2(1-x^n)-(2n-1)x^n(1-x)-(1-x)}{1-x}=\frac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

よって、$S=\dfrac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$ となる

この計算では、$S-xS$ の右辺で

- 等比数列の和公式を用いるために、右辺の第１項を１から２に変え、最後に−１とする工夫などが要る。
- 通分で計算を正確にする必要がある。

- もう一度 x をかけて差し引く計算法

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & S= & 1 & +3x & +5x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(2n-1)x^{n-1} & & \\ -) & xS= & & x & +3x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(2n-3)x^{n-1} & +(2n-1)x^n & \\ \hline & (1-x)S= & 1 & +2x & +2x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +2x^{n-1} & -(2n-1)x^n & \\ -) & x(1-x)S= & & x & +2x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +2x^{n-1} & +2x^n & -(2n-1)x^{n+1} \\ \hline & (1-2x+x^2)S= & 1 & +x & & & & -(2n+1)x^n & +(2n-1)x^{2n+1} \end{array}$$

よって、$S=\dfrac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$ となる

この計算の方が早くて正確にできるのではないかと思うが、どうだろうか。
数値の問題ではどうか。

例　$S=1\cdot1+4\cdot2+7\cdot2^2\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$

- 標準的な方法

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & S= & 1\cdot1 & +4\cdot2 & +7\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-2)\cdot2^{n-1} & \\ -) & 2S= & & 1\cdot2 & +4\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-5)\cdot2^{n-1} & +(3n-2)\cdot2^n \\ \hline & -S= & 1 & 3\cdot2 & +3\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +3\cdot2^{n-1} & -(3n-2)\cdot2^n \end{array}$$

従って、

$$\begin{aligned}-S &= 3+3\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots\cdots+3\cdot2^{n-1}-(3n-2)\cdot2^n-2\\ &= \frac{3(2^n-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot2^n-2=-(3n-5)2^n-5\end{aligned}$$

よって、$5+(3n-5)2^n$

- ２度差し引く方法

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & S= & 1\cdot1 & +4\cdot2 & +7\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-2)\cdot2^{n-1} & & \\ -) & 2S= & & 1\cdot2 & +4\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-5)\cdot2^{n-1} & +(3n-2)\cdot2^n & \\ \hline & -S= & 1 & 3\cdot2 & +3\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +3\cdot2^{n-1} & -(3n-2)\cdot2^n & \\ -) & -2S= & & 1\cdot2 & +3\cdot2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +3\cdot2^{n-1} & +3\cdot2^n & -(3n-2)\cdot2^{n+1} \\ \hline & S= & 1 & +2\cdot2 & & & & -(3n+1)\cdot2^n & +(3n-2)\cdot2^{n+1} \end{array}$$

従って、$S=5-(3n+1)2^n+(3n-2)2^{n+1}=5+\{-(3n+1)+2(3n-2)\}2^n=5+(3n-5)2^n$

２度繰り返して差し引く計算法は、結構有効に使えるのではないだろうか。

2 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$ の計算について

2013 年 6 月 29 日　片山　喜美

2013 年度東京大学・前期理系の問題３で、 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$ の計算が出てくる。分子が k の１次式であれば、教科書程度の問題であるが、２次式となっている。先日、職員室で以下の解法１による計算（「大学への数学」の解法はこれと同様）について「大変だ」という声が出ていた。そこで、もう少し楽に計算できないか考えてみたのが、解法２、解法３である。

1. 解法１（公比をかけて差し引く ⋯ 結構大変）

$$
\begin{array}{lrllllllll}
 & S_N = & \frac{1\cdot 2}{2^3} & +\frac{2\cdot 3}{2^5} & +\frac{3\cdot 4}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+1}} & & \\
-) & \frac{1}{4}S_N = & & \frac{1\cdot 2}{2^5} & +\frac{2\cdot 3}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{(N-1)\cdot N}{2^{2N+1}} & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+3}} & \\
\hline
 & \frac{3}{4}S_N = & \frac{2}{2^3} & +\frac{4}{2^5} & +\frac{6}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2N}{2^{2N+1}} & -\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+3}} & \\
-) & \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}S_N = & & \frac{2}{2^5} & +\frac{4}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2(N-1)}{2^{2N+1}} & +\frac{2N}{2^{2N+3}} & -\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+3}} \\
\hline
 & \frac{9}{16}S_N = & \frac{2}{2^3} & +\frac{2}{2^5} & +\frac{2}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2}{2^{2N+1}} & -\frac{N(N+3)}{2^{2N+3}} & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+5}}
\end{array}
$$

従って、

$$\frac{9}{16}S_N=\frac{2}{2^3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^N}{1-\frac{1}{4}}-\frac{N(N+3)}{2^{2N+3}}+\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+5}}=\frac{1}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^N\right\}-\frac{N(3N+11)}{2^{2N+5}}$$

よって、$S_N=\dfrac{16}{27}\cdot\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^N\right\}-\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{N(3N+11)}{2^{2N+5}}$　　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{16}{27}$ となる。

だたし、$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{4^N}=0$ については、２項定理等で証明するところを省略した。

以前に別のメモで書いたが、最後に等比数列の和の公式を用いる代わりに、もう一度 $\dfrac{1}{4}$ をかけて差し引く方法もある。

$$
\begin{array}{lrlllllllll}
 & S_N = & \frac{1\cdot 2}{2^3} & +\frac{2\cdot 3}{2^5} & +\frac{3\cdot 4}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+1}} & & & \\
-) & \frac{1}{4}S_N = & & \frac{1\cdot 2}{2^5} & +\frac{2\cdot 3}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{(N-1)\cdot N}{2^{2N+1}} & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+3}} & & \\
\hline
 & \frac{3}{4}S_N = & \frac{2}{2^3} & +\frac{4}{2^5} & +\frac{6}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2N}{2^{2N+1}} & -\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+3}} & & \\
-) & \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}S_N = & & \frac{2}{2^5} & +\frac{4}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2(N-1)}{2^{2N+1}} & +\frac{2N}{2^{2N+3}} & -\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+5}} & \\
\hline
 & \frac{9}{16}S_N = & \frac{2}{2^3} & +\frac{2}{2^5} & +\frac{2}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2}{2^{2N+1}} & -\frac{N(N+3)}{2^{2N+3}} & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+5}} & \\
-) & \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}S_N = & & \frac{2}{2^5} & +\frac{2}{2^7} & +\cdots\cdots\cdots & +\frac{2}{2^{2N+1}} & +\frac{2}{2^{2N+3}} & -\frac{N(N+3)}{2^{2N+5}} & +\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+7}} \\
\hline
 & \frac{27}{64}S_N = & \frac{2}{2^3} & & & & & -\frac{N^2+3N+2}{2^{2N+3}} & \frac{2N(N+2)}{2^{2N+5}} & -\frac{N\cdot(N+1)}{2^{2N+7}}
\end{array}
$$

従って、 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{27}{64}S_N=\frac{1}{4}$　　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{27}{16}$

この計算を見て分かるように、このような問題で極限値に関わるのは、最後に残る左端（問題によって１項ないし２項程度）の数値及び 左辺の係数、すなわち、等差の公比を r としたときの $(1-r)$ を２乗、３乗した数値だけである。後ろの方に出てくる項は、それぞれ０に収束するから、無理してまとめることは無い。

ただし、計算はある程度大変である。

2. 解法２ $\left(\dfrac{k(k+1)}{2^{2K+1}} = b_k - b_{k+1}\text{を利用する方法}\right)$

この方法でやるとかなり楽に計算できる。

$\dfrac{k(k+1)}{2^{2k+1}} = \dfrac{ak^2+bk+c}{2^{2k-1}} - \dfrac{a(k+1)^2+b(k+1)+c}{2^{2k+1}}$ と置く。
$(\text{右辺}) = \dfrac{3ak^2+(-2a+3b)k+(-a-b+3c)}{2^{2k+1}}$ となるので、係数を比較して、
$3a=1,\quad -2a+3b=1,\quad -a-b+3c=0$ 。これを解いて $a=\dfrac{1}{3},\quad b=\dfrac{5}{9},\quad c=\dfrac{8}{27}$
従って、 $b_k = \dfrac{1}{2^{2k-1}}\left(\dfrac{1}{3}k^2+\dfrac{5}{9}k+\dfrac{8}{27}\right)$ とすると、 $\dfrac{k(k+1)}{2^{2K+1}} = b_k - b_{k+1}$
このとき、 $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}(b_k-b_{k+1}) = b_1 - b_{N+1}$
ここで、 $b_1 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{9}+\dfrac{8}{27} = \dfrac{16}{27}$ 。また、 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} b_{N+1} = 0$
よって、 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = \dfrac{16}{27}$

3. 解法３（無限等比数列の和と微分の利用）

$|x|<1$ のとき、無限級数 $f(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\quad +x^n+x^{n+1}+\cdots\cdots$ は絶対収束するので、項別に微分してよい。
従って、 $f'(x) = 1+2x+3x^2+\cdots\cdots nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots\cdots$
さらに、 $f''(x) = 2+3\cdot 2x+\cdots\cdots+n(n-1)x^{n-2}+(n+1)nx^{n-1}+\cdots\cdots$
よって、 $\dfrac{1}{2^3}f''(\tfrac{1}{2^2}) = \dfrac{1\cdot 2}{2^3}+\dfrac{2\cdot 3}{2^5}+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2^{2n+1}}+\cdots\cdots = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$

一方、 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ であるから、
$f'(x) = -(1-x)^{-2}(-x)' = (1-x)^{-2},\quad f''(x) = -2(1-x)^{-3}(-x)' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ となり、
$\dfrac{1}{2^3}f''(\tfrac{1}{2^2}) = \dfrac{1}{2^3}\cdot\dfrac{2}{(1-\frac{1}{4})^3} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{16}{27}$
以上により、 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{k(k+1)}{2^{2k+1}} = \dfrac{16}{27}$

＜注意＞
無限級数の和と微分の順序入れ替えを高校生が使っていけないとなれば、まず、
$f_N(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^N+x^{N+1}$ とおいて、
$f'_N(x) = 1+2x+3x^2+\cdots\cdots+Nx^{N-1}+(N+1)x^N$
$f''_N(x) = 2+2\cdot 3x+\cdots\cdots+(N-1)Nx^{N-2}+N(N+1)x^{N-1}$ であるから、
$\dfrac{1}{2^3}f''_N(\tfrac{1}{2^2}) = \dfrac{1\cdot 2}{2^3}+\dfrac{2\cdot 3}{2^5}+\cdots\cdots+\dfrac{(N-1)N}{2^{2N-1}}+\dfrac{N(N+1)}{2^{2N+1}} = S_N$ となる。
ここまではよいが、$x\neq 1$ のとき、 $f_N(x) = \dfrac{1-x^{N+2}}{1-x}$,
微分して、$f'_N(x) = \dfrac{1-(N+1)x^{N+1}+Nx^{N+2}}{(1-x)^2}$ 、さらに微分して $f''_N(x)$ を計算するところが煩雑である。煩雑すぎて、この方法がよいと言えなくなってしまう。おおらかに考えるかどうか。

コメント

- 解法２の方法のアイディアは、部分分数展開による和の求め方でよく使うし、受験指導で $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ を求める際に、$k(k+1)=\dfrac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$ を利用する方法を取り上げることがある。

  しかし、今回取り上げたようなものについて、未定係数法を用いて階差として表す方法は余り指導していないかもしれない。今年の東大の問題の予備校等の解答例の中には、この方法を見かけなかった。と思っていたら、「大学への数学」の別冊には、読者からの投稿による同様な解法が follow up に出ていたことを同僚の先生が見つけてくれた。

- 解法３については、$f'(x)$ を利用して、一般項が等差×等比の数列の和を求める方法を数学 III で扱うことであろう。しかし、 $f''(x)$ まで利用することは、少なくとも最近はしたことがなかった。６，７年受験指導から離れてしまっていた。そのため、かつて $f''(x)$ を利用した計算を受験指導または専門書を読む中でしたに違いない、今回が初めてではない、と思っているが、どうなのかわからない。

3　階差数列を用いた漸化式の解法について

2013 年 6 月 10 日（6 月 19 日追加）
片山　喜美

階差数列を用いて漸化式を解くと、「 $n \geq 2$ のとき、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 」の計算が面倒である。　しかし、授業で生徒の解答を見ていたら、この計算が不要であることに気づいた。このことは、よく知られていることかもしれないが一応メモしておくことにする。

さらに、 $a_{n+1} = ra_n + f(n)$ 　$(r \neq 1,\ f(n)$ は n の多項式$)$ 　のタイプの漸化式については、階差数列を取るたびに $f(n)$ の部分の次数が下がり、いずれ等比数列に到達する。その等比数列の初項の計算方法を解明し、途中に出てくる n の式（それはもとの $f(n)$ の差分である）を用いることにより、効率よく a_n の一般項を計算できることが分かったので書き留めておく。

例 1　 $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

- 従来、教科書に載っていた漸化式による解法
  漸化式の番号を 1 つ増やした $a_{n+2} = 3a_{n+1}+2$ と元の漸化式を差し引いて、$a_{n+2}-a_{n+1} = 3(a_{n+1}-a_n)$ となる。階差数列を $\{b_n\}$ とおくと、$b_{n+1} = 3b_n$ となるので、$\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列である。その初項は $a_2 - a_1 = (3a_1 + 2) - a_1 = (3 + 2) - 1 = 4$ 。従って、$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ 。
  $n \geq 2$ のとき、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 3^{k-1} = 1 + 4 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ 。これは $n = 1$ のときにも成り立つ。

- これに対して、階差数列を求めた後、再び漸化式に戻る方法
  漸化式の番号を 1 つ増やした $a_{n+2} = 3a_{n+1}+2$ と元の漸化式を差し引いて、$a_{n+2}-a_{n+1} = 3(a_{n+1}-a_n)$ となる。従って、数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比 3 の等比数列である。その初項は $a_2 - a_1 = (3a_1 + 2) - a_1 = (3 + 2) - 1 = 4$ 。よって、$a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ 。この式に与えられた漸化式を代入すると、$(3a_n + 2) - a_n = 2a_n + 2 = 4 \cdot 3^{n-1}$ 。これにより、$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

この解法は、特性方程式を利用した変形 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ による解法と比べても、決して複雑ではないと思える。以下に、この解法をいくつか適用し、素早い計算法を考えてみる。

例 2　 $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + n$

- $a_{n+2} = 2a_{n+1} + (n + 1)$ と元の漸化式を差し引いて、$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$ 。階差数列を $\{b_n\}$ とおくと、$b_{n+1} = 2b_n + 1$ 。
  上と同様の操作により、$b_{n+2} - b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n)$ 。従って、数列 $\{b_{n+1} - b_n\}$ は公比 2 の等比数列である。
  　素早く解答を作成できるように上記の操作を整理しておく。
  　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ 、第 2 階差数列を $\{c_n\}$ とおくと、与えられた漸化式から
  - $b_{n+1} = 2b_n + 1,\quad c_{n+1} = 2c_n$ 。従って、数列 $\{c_n\}$ は公比 2 の等比数列である。
  - $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$
  - $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2,\quad b_2 = 2b_1 + 1 = 5$
  - $c_1 = b_2 - b_1 = 5 - 2 = 3$ より $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
  - この結果から、$b_{n+1} - b_n = (2b_n + 1) - b_n = b_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$ 。よって、$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$
  - この結果から、$a_{n+1} - a_n = (2a_n + n) - a_n = a_n + n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ 。よって、$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$

- もちろん次の変形による解法は手際よい。
  - $a_{n+1}+p(n+1)+q=2(a_n+pn+q)$ とおくと、 $a_{n+1}=2a_n+pn+(-p+q)$ 。従って、 $p=1,\ -p+q=0$ 。これより $q=1$
  - $a_{n+1}+(n+1)+1=2(a_n+n+1)$ となるので数列 $\{a_n+n+1\}$ は公比 2 の等比数列である。その初項は $a_1+1+1=3$ であるから、$a_n+n+1=3\cdot 2^{n-1}$ 。よって、$a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$

例 3 $\quad a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+n^2$

- 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ 、第 2 階差数列を $\{c_n\}$ 、第 3 階差数列を $\{d_n\}$ とおくと、与えられた漸化式から
  - $b_{n+1}=2b_n+(n+1)^2-n^2=2b_n+2n+1,\quad c_{n+1}=2c_n+\{2(n+1)+1\}-(2n+1)=2c_n+2,\quad d_{n+1}=2d_n$ 。従って、数列 $\{d_n\}$ は公比 2 の等比数列である。
  - $a_2=2a_1+1=2+1=3$
  - $b_1=a_2-a_1=3-1=2,\quad b_2=2b_1+2\cdot 1+1=7$
  - $c_1=b_2-b_1=7-2=5,\quad c_2=2c_1+2=12$
  - $d_1=c_2-c_1=12-5=7$ より $d_n=7\cdot 2^{n-1}$
  - この結果から、$c_{n+1}-c_n=(2c_n+2)-c_n=c_n+2=7\cdot 2^{n-1}$ 。よって、$c_n=7\cdot 2^{n-1}-2$
  - この結果から、$b_{n+1}-b_n=(2b_n+2n+1)-b_n=b_n+2n+1=7\cdot 2^{n-1}-2$ 。よって、$a_n=7\cdot 2^{n-1}-2n-3$
  - この結果から、$a_{n+1}-a_n=(2a_n+n^2)-a_n=a_n+n^2=7\cdot 2^{n-1}-2n-3$ 。よって、$a_n=7\cdot 2^{n-1}-n^2-2n-3$

  ＜注意＞第 3 階差数列で等比になり、$7\cdot 2^{n-1}$ を得た後は、そこまでに使った漸化式の等比以外の部分 $n^2,\ 2n+1,\ 2$ を全て加えた n^2+2n+3 を差し引けばよいことが分かるので、解答は（テストの答案では説明不足とされるかもしれないが）もっと早くできる。ただし、公比 r が 2 でない場合は、$r-1$ で割っていくなどの注意が必要であろう。

- 参考 $\quad a_{n+1}+p(n+1)^2+q(n+1)+r=2(a_n+pn^2+qn+r)$ とおく解法
  - $a_{n+1}=2a_n+pn^2+(-2p+q)n+(-p-q+r)$ 。従って、 $p=1,\ -2p+q=0,\ -p-q+r=0$ 。これより $q=2,\ r=3$
  - $a_{n+1}+(n+1)^2+2(n+1)+3+1=2(a_n+n^2+2n+3)$ となるので数列 $\{a_n+n^2+2n+3\}$ は公比 2 の等比数列である。その初項は $a_1+1^2+2\cdot 1+3=7$ であるから、$a_n+n^2+2n+3=7\cdot 2^{n-1}$ 。よって、$a_n=7\cdot 2^{n-1}-n^2-2n-3$

階差の方法で手早く計算を実行する。

例 4 $\quad a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+n^2$

- 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ 、第 2 階差数列を $\{c_n\}$ 、第 3 階差数列を $\{d_n\}$ とおくと、与えられた漸化式から
  - $b_{n+1}=3b_n+2n+1,\quad c_{n+1}=3c_n+2,\quad d_{n+1}=3d_n$ 　従って、数列 $\{d_n\}$ は公比 2 の等比数列である。
  - $a_2=3a_1+1^2=4$
  - $b_1=a_2-a_1=4-1=3,\quad b_2=3b_1+2\cdot 1+1=12$
  - $c_1=b_2-b_1=12-3=9,\quad c_2=3c_1+2=29$

- $d_1 = c_2 - c_1 = 29 - 9 = 20$　従って、$d_n = 20 \cdot 3^{n-1}$
- これと、$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ に関する漸化式の等比以外の部分、及び、階差を１段さかのぼる度に係数の差である $3 - 1 = 2$ で割ることを考慮すると、
$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 20 \cdot 3^{n-1} - \left\{\frac{1}{2}n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (2n+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 2\right\} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{2} - \frac{2n^2 + (2n+1) + 1}{4}$
$= \frac{5 \cdot 3^{n-1} - (n^2 + n + 1)}{2}$

階差、第２階差、第３階差と進めていくと、微分によく似た差分により、等比以外の部分にある n の次数が順次下がっていき、いずれ等比数列に到達する。そこから元に戻るときに、毎回、Σ の計算を実行することは大変面倒であった。

しかしながら、Σ 計算が不要であり、さらにコツを掴めば上記例４のように等比の段階から一挙に、求める数列を計算できる。生徒への指導に使うかは別問題であるが、それなりの解法だと思う。

次のような一般の場合について、考察してみる。

$\boxed{a_1 = a, \quad a_{n+1} = ra_n + f(n) \quad (r \neq 1, f(n) \text{ は } n \text{ の } N \text{ 次式})}$

数列 $\{a_n\}$ に対して、その第 k 階差数列を $\{a_n^{(k)}\}$ とする。また、$\{a_n^{(0)}\} = \{a_n\}$ とする。
$f_0(n) = f(n), \quad f_{k+1}(n) = f_k(n+1) - f_k(n)$ とおくと、帰納的に $a_{n+1}^{(k)} = ra_n^{(k)} + f_k(n)$ とできる。
このとき、$f_k(n)$ は n の $N-k$ 次式である。従って、$f_N(n)$ は定数。そして、$f_{N+1}(n) = 0$ である。
すると $a_{n+1}^{(N+1)} = ra_n^{(N+1)}$ となり、数列 $\{a_n^{(N+1)}\}$ は公比 r の等比数列であることが分かる。その初項 $a_1^{(N+1)}$ が計算できたなら、$a_n^{(N+1)} = r^{n-1} a_1^{(N+1)}$ とできる。

次に、$a_n^{(N+1)}$ から元の数列に向かって、階差を順次逆戻りすることを考える。
$a_n^{(k+1)} = a_{n+1}^{(k)} - a_n^{(k)} = (ra_n^{(k)} + f_k(n)) - a_n^{(k)} = (r-1)a_n^{(k)} + f_k(n)$
この両辺を $(r-1)^{k+1}$ で割って、$\frac{a_n^{(k+1)}}{(r-1)^{k+1}} = \frac{a_n^{(k)}}{(r-1)^k} + \frac{f_k(n)}{(r-1)^{k+1}}$

- $a_n^{(N+1)}$ から始めて、$a_n^{(0)}$ へ逆戻るには、
上式を $\frac{a_n^{(k)}}{(r-1)^k} - \frac{a_n^{(k+1)}}{(r-1)^{k+1}} = -\frac{f_k(n)}{(r-1)^{k+1}}$ と変形して、
$$\frac{a_n^{(0)}}{(r-1)^0} = \frac{a_n^{(N+1)}}{(r-1)^{N+1}} - \sum_{k=0}^{N} \left\{\frac{a_n^{(k)}}{(r-1)^k} - \frac{a_n^{(k+1)}}{(r-1)^{k+1}}\right\} = \frac{a_n^{(N+1)}}{(r-1)^{N+1}} - \sum_{k=0}^{N} \frac{f_k(n)}{(r-1)^{k+1}}$$
- 初項について、$a_1^{(0)}$ から始めて、$a_1^{(N+1)}$ を求めるには、上と同様の操作を逆に実行して
$$\frac{a_1^{(N+1)}}{(r-1)^{N+1}} = \frac{a_1^{(0)}}{(r-1)^0} + \sum_{k=0}^{N} \left\{\frac{a_1^{(k+1)}}{(r-1)^{k+1}} - \frac{a_1^{(k)}}{(r-1)^k}\right\} = \frac{a_1^{(0)}}{(r-1)^0} + \sum_{k=0}^{N} \frac{f_k(1)}{(r-1)^{k+1}}$$
従って、$a_1^{(N+1)} = (r-1)^{N+1} a_1^{(0)} + \sum_{k=0}^{N} (r-1)^{N-k} f_k(1)$

以上をまとめて、

(1) $a_1^{(N+1)} = (r-1)^{N+1} a + \sum_{k=0}^{N} (r-1)^{N-k} f_k(1)$

(2) $a_n^{(N+1)} = a_1^{(N+1)} r^{n-1}$

(3) $a_n = \frac{a_n^{(N+1)}}{(r-1)^{N+1}} - \sum_{k=0}^{N} \frac{f_k(n)}{(r-1)^{k+1}}$

の手順で求めていけばよい。

例えば、例１　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$ については、$N = 0, \quad f_0(n) = 2$ であるから、

- $a_1^{(1)} = 2 \cdot a_1 + 1 \cdot f_0(1) = 2 + 2 = 4, \quad a_n^{(1)} = 4 \cdot 3^{n-1}$

- $a_n = \dfrac{a_n^{(1)}}{2} - \dfrac{f_0(n)}{2} = \dfrac{4 \cdot 3^{n-1}}{2} - \dfrac{2}{2} = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

と求めていける。
一般に、$a_1 = a, \quad a_{n+1} = ra_n + q \quad (r \neq 1)$ については、

- $a_1^{(1)} = (r-1) \cdot a_1 + 1 \cdot f_0(1) = (r-1)a + q, \quad a_n^{(1)} = \{(r-1)a + q\} \cdot r^{n-1}$
- $a_n = \dfrac{a_n^{(1)}}{r-1} - \dfrac{f_0(n)}{r-1} = \dfrac{\{(r-1)a+q\} \cdot r^{n-1}}{r-1} - \dfrac{q}{r-1}$

例２　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$　については、$N = 1, \quad f_0(n) = n, r = 2$ であるから、

- $f_1(n) = (n+1) - n = 1, \qquad f_0(n) = 1, \quad f_1(1) = 1$
- $a_1^{(2)} = 1^2 \cdot a_1 + 1 \cdot f_0(1) + f_1(1) = 1 + 1 + 1 = 3, \quad a_n^{(1)} = 3 \cdot 2^{n-1}$
- $a_n = \dfrac{a_n^{(2)}}{1^2} - \dfrac{f_0(n)}{1} - \dfrac{f_1(n)}{1^2} = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$

例３　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n^2$　については、$N = 2, \quad f_0(n) = n^2, r = 2$ であるから、

- $f_1(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \, f_2(n) = 2, \qquad f_0(n) = 1, \quad f_1(1) = 3, \quad f_2(1) = 2$
- $a_1^{(2)} = 1^3 \cdot a_1 + 1^3 \cdot f_0(1) + 1^2 \cdot f_1(1) + f_2(1) = 1 + 1 + 3 + 2 = 7, \quad a_n^{(3)} = 7 \cdot 2^{n-1}$
- $a_n = \dfrac{a_n^{(3)}}{1^3} - \dfrac{f_0(n)}{1} - \dfrac{f_1(n)}{1^2} - \dfrac{f_2(n)}{1^3} = 7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - (2n+1) - 2 = 7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$

その他のものについても計算してみる。

$\boxed{\text{例５} \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + n^3}$

- $f_0(n) = n^3, \quad f_1(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$
  $f_2(n) = \left\{3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\right\} - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6, \quad f_3(n) = 6, \quad f_4(n) = 0$
- $f_0(1) = 1, \, f_1(1) = 7, \, f_2(1) = 12, \, f_3(1) = 6$
- $a_1^{(4)} = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 6 = 82$　よって、$a_n^{(4)} = 82 \cdot 3^{n-1}$
- $a_n = \dfrac{a_n^{(4)}}{2^4} - \left\{\dfrac{f_0(n)}{2} + \dfrac{f_1(n)}{2^2} + \dfrac{f_2(n)}{2^3} + \dfrac{f_3(n)}{2^4}\right\}$
  $= \dfrac{82 \cdot 3^{n-1}}{2^4} - \left(\dfrac{n^3}{2} + \dfrac{3n^2 + 3n + 1}{4} + \dfrac{6n+6}{8} + \dfrac{6}{16}\right)$
  $= \dfrac{41 \cdot 3^{n-1} - (4n^3 + 6n^2 + 12n + 11)}{8}$

課題　$n^m \, (m = 1, 2, 3, \cdots)$ について、その差分がどうなっていくかまとめておくと、一般の n 次式 $f(n)$ について、$f_k(n)$ を素早く求めていくことができるだろう。