数学に関するいくつかの話題について

平成 25 年 12 月

富山県立高岡高等学校　片山　喜美

目 次

1　n 個の素数の積＋１　で表される数について

平成 25 年 9 月
片山喜美

1.　$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdots p_n + 1$

素数が無限に存在することのユークリッドによる証明は、素数が有限個しかないと仮定し、それら全てを $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ として、上記の数 q から矛盾を導くものである。

ここでは、具体的に、$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots$ というふうに、素数を小さい順に並べて、$q_n = p_1 \cdot p_2 \cdots\cdots p_n + 1$ とおき、その数を調べてみる。

- $q_1 = 2 + 1 = 3$　素数
- $q_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$　素数
- $q_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$　素数
- $q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$　素数
- $q_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$　素数
- $q_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$　合成数
- $q_7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511 = 19 \cdot 97 \cdot 277$　合成数
- $q_8 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9699691 = 347 \cdot 27953$　合成数

上記については、q_n を Excel で計算し、その素因数分解は数式処理ソフト Maxima の関数 factor() を用いた。q_8 で止めたのは、Excel がそれ以上になると桁あふれを起こすからである。

これを見ると、q_1 から q_5 は素数であるが、その後は、合成数が続く。

<u>課題</u>　この先、素数が出てくるのはいつか？　あるいは、もう素数は出てこないのか？

なお、ユークリッドの証明では、「q_n が新たな素数になる」と勘違いしそうなので注意が必要ある。素数かもしれないし、新たな素因数をもつ合成数であるかもしれない。むしろ、q_n が素数となることの方が珍しいのではないかと思う。なぜなら、q_n はどんどん大きくなり、p_n と q_n のギャップが相当になるので、その間に q_n を割り切る素数が存在する可能性があるからだ。従って、巨大な素数を作り出すためには q_n ではうまく行かない。メルセンヌ素数を用いる方が巨大な素数を見つけるのには有利なのだろう。

2.　$n! + 1$

素数ばかりの積に 1 を加えるのではなく、$n! + 1$ としてもよいのではないか。素数が無限個あることの証明にしても、以下のような表現が可能であろう。

素数が有限個しかないと仮定して、その最大のものを n とする。そして、$r_n = n! + 1$ とおくと、r_n は n 以下の任意の自然数で割って、余りが 1 となる。従って、r_n の素因数は n 以下のものではない。これは最大の素数が n であるとした仮定に矛盾する。//

上の証明は、「任意の n について、それより大きな素数が存在する。従って、素数は無限に存在する。」というふうに捉えてもよい。

さて、r_n についても、具体的に数を調べてみる。

- $r_1 = 1 + 1 = 2$　素数

- $r_2 = 2! + 1 = 3$　素数
- $r_3 = 3! + 1 = 7$　素数
- $r_4 = 4! + 1 = 25 = 5^2$　合成数
- $r_5 = 5! + 1 = 121 = 11^2$　合成数
- $r_6 = 6! + 1 = 721 = 17 \cdot 103$　合成数
- $r_7 = 7! + 1 = 5041 = 71^2$　合成数
- $r_8 = 8! + 1 = 40321 = 61 \cdot 661$　合成数
- $r_9 = 9! + 1 = 362881 = 19 \cdot 71 \cdot 269$　合成数
- $r_{10} = 10! + 1 = 3628801 = 11 \cdot 329891$　合成数
- $r_{11} = 11! + 1 = 39916801$　素数
- $r_{12} = 12! + 1 = 479001601 = 13^2 \cdot 284329$　合成数

・r_4 から合成数になるが、ひょっこりと素数が r_{11} で出てきた。かなり大きな素数である。
・素数 p は、 r_p より手前に既に出現していなければならない。
　その他に何か規則性があるのか、よく知らない。

3.　素数砂漠

$r_n = n! + 1$ は、新たな素数につながることが分かったが、その後に続く数にも意味がある。

上記の r_n の次の数 $n! + 2$ は 2 で割り切れる。 その次の $n! + 3$ は 3 で割り切れる。その後も続け、最後に、$n! + n$ は n で割り切れる。従って、$n! + 2$ から $n! + n$ までの連続した $n - 1$ 個の数は全て合成数である。

しばらく、合成数が続いて、素数が現れない区間を「素数砂漠」というそうだ。
n は任意であるから、いくらでも大きな長さの素数砂漠が存在すると言える。

補足　Maxima で簡単に計算可能

Fermat は $F_n = 2^{2^n} + 1$ で表される数が全て素数であると予想した。(Fermat 素数) $F_1 = 2^2 + 1 = 5$ 素数、　$F_2 = 2^4 + 1 = 17$　素数、　$F_3 = 2^8 + 1 = 257$　素数、　$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$ 素数、は確かに全て素数である。(定規とコンパスで作図できる正多角形で素数個の頂点を持つものは、Fermat 素数のときである。)

しかし、Euler が　$F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ について、641×6700417 と素因数分解されること、すなわち合成数であることを発見した。(そして、現在に至るまで、上記以外の Fermat 素数は見つかっていない。)

この素因数分解の発見は、Euler レベルの偉い人が工夫とかなりの計算力を持ってしなければ成し遂げられなかった。　しかしながら、Maxima に入力すると、
$(i1)$　$factor(2^{2^5} + 1);$
$(o1)$　$641 * 6700417$
と瞬時に答えを返してくれる。どんなアルゴリズムで計算しているのだろうか。

2　不定方程式 $ax+by=d$ の特殊解の簡単な求め方について

平成 25 年秋
富山県立高岡高等学校　片山喜美

数学 A で整数分野を扱うことになり、ユークリッドの互除法と一次不定方程式について学習している。教科書には、「$45x+32y=4$ の整数解をすべて求めよ。」という例題がある。解答の手順としては、

(ｉ)　互除法で 45 と 32 が互いに素であることを示す

(ⅱ)　$45x+32y=1$ の特殊解 $x=5, y=-7$ を見つけ、4 倍して $45x+32y=4$ の特殊解 $x=20, y=-28$ を得る

(ⅲ)　一般解は $x=20+32n, y=-28-32n$ となる。

この手順の中で、特殊解を求める部分が早く正確にできるかどうか。
$45x+32y=1$ の特殊解を 1 つ求める方法を考察してみる。

1. 互除法の計算と、それを遡る基本的な計算方法

□互除法

$$\begin{aligned} 45 &= 32\times 1+13 \\ 32 &= 13\times 2+6 \\ 13 &= 6\times 2+1 \end{aligned}$$

従って、45 と 32 の最大公約数は 1

□左の互除法を遡る計算

$$\begin{aligned} 1 &= 13-6\times 2 \\ &= 13-(32-13\times 2)\times 2 \\ &= 13\times 5+32\times(-2) \\ &= (45-32\times 1)\times 5+32\times(-2) \\ &= 45\times 5+32\times(-7) \end{aligned}$$

従って、$x=5, y=-7$

右側の遡る計算は案外面倒で、途中、注意しないと正負のミスを起こしやすい。
もう少し大きな数字ではどうか？　$311x+217y=1$ についてこの計算方法を試してみる。

□互除法

$$\begin{aligned} 311 &= 217\times 1+94 \\ 217 &= 94\times 2+29 \\ 94 &= 29\times 3+7 \\ 29 &= 7\times 4+1 \end{aligned}$$

従って、311 と 217 の最大公約数は 1

□左の互除法を遡る計算

$$\begin{aligned} 1 &= 29-7\times 4 \\ &= 29-(94-29\times 3)\times 4 \\ &= 29\times 13+94\times(-4) \\ &= (217-94\times 2)\times 13+94\times(-4) \\ &= 217\times 13+94\times(-30) \\ &= 217\times 13+(311-217\times 1)\times(-30) \\ &= 217\times 43+311\times(-30) \end{aligned}$$

従って、$x=30, y=-43$

これはかなり大変である。何かよい方法はないのかということで、N 先生から次の方法の提案があった。

2. 連立方程式の行基本変形の考え方を用いた計算方法（N 先生案）

$$\begin{array}{lllll} & 45\times 1 & +\ 32\times 0 & =45 & \cdots(1) \\ & 45\times 0 & +\ 32\times 1 & =32 & \cdots(2) \\ (1)-(2) & 45\times 1 & +\ 32\times(-1) & =13 & \cdots(3) \\ (2)-2\times(3) & 45\times(-2) & +\ 32\times 3 & =6 & \cdots(4) \\ (3)-2\times(4) & 45\times 5 & +\ 32\times(-7) & =1 & \end{array}$$

従って、$x=5, y=-7$

$311x+217y=1$ についてこの計算方法を試してみる。

	311×1	$+$	217×0	$=311$	$\cdots(1)$
	311×0	$+$	217×1	$=217$	$\cdots(2)$
$(1)-(2)$	311×1	$+$	$217\times(-1)$	$=94$	$\cdots(3)$
$(2)-2\times(3)$	$311\times(-2)$	$+$	217×3	$=29$	$\cdots(4)$
$(3)-3\times(4)$	311×7	$+$	$217\times(-10)$	$=7$	$\cdots(5)$
$(4)-4\times(5)$	$311\times(-30)$	$+$	217×43	$=1$	

従って、$x=-30, y=43$

3. 互除法とそれを遡る計算を素早くする工夫（片山案）

上記の提案を受けて、片山も計算を素早く正確にする以下の計算方法を考えてみた。

□互除法

	45	32	
	32		(1
	13	32	
2)		26	
	13	6	
	12		(2
	1		

右へ（下から上へ計算）

□ x, y を求める計算

5	-7
5	-2
1	-2

（下から上へ至る）

□計算の説明

step 3. 右の -7 は $-2-5\times 1$

(1 段下の右の -2、左の 5 ×互除法の商 1)

step 2. 左の 5 は $1-2\times(-2)$

(1 段下の左の 1、右の -2 ×互除法の商 2)

step 1. 互除法の最終結果

$13\times 1-6\times 2=1$

従って、$x=5, y=-7$

$311x+217y=1$ についてこの計算方法を試してみる。

□互除法

	311	217	
	217		(1
	94	217	
2)		188	
	94	29	
	87		(3
	7	29	
4)		28	
		1	

右へ（下から上へ計算）

□ x, y を求める計算

-30	43
-30	13
-4	13
-4	1

（下から上へ至る）

□計算の説明

$13-1\times(-30)=43$

$-4-2\times 13=-30$

$1-3\times(-4)=13$

従って、$x=-30, y=43$

この計算方法に慣れると、かなり早く計算できると思う。

右の x, y を求める計算のところで書く量が上の計算に比べて圧倒的に少ない。この方法は、組み立て除法を用いるときとよく似た感覚の計算である。

この方法を多項式の最大公約数の計算に用いることもできる。

問題「$A(x)-x^3, B(x)=x^2+x-2$ について、$A(x)p(x)+B(x)q(x)=1$ を満たす多項式 $p(x), q(x)$ を求めよ。」

□互除法

$$
\begin{array}{lll}
x^3 & x^2+x-2 & \\
x^3+x^2-2x & & (x \\
\hline
-x^2+2x & x^2+x-2 & \\
-x^2-x+2 & & (-1 \\
\hline
3x-2 & x^2+x-2 & \\
\frac{1}{3}x) & x^2-\frac{2}{3}x & \\
\hline
3x-2 & \frac{5}{3}x-2 & \\
\frac{5}{9}) & \frac{5}{3}x-\frac{10}{9} & \\
\hline
 & -\frac{8}{9} &
\end{array}
$$

右へ（下から上へ計算）

□ $p(x), q(x)$ を求める計算

$$
\begin{array}{ll}
-\frac{3x+5}{9} & \frac{3x^2+2x+4}{9} \\
 & \\
\hline
-\frac{3x+5}{9} & -\frac{3x-4}{9} \\
 & \\
\hline
-\frac{3x+5}{9} & 1 \\
 & \\
\hline
-\frac{5}{9} & 1
\end{array}
$$

（下から上へ至る）

上の計算から $x^3 \times \left(-\dfrac{3x+5}{9}\right) + (x^2+x-2) \times \dfrac{3x^2+2x+4}{9} = -\dfrac{8}{9}$

従って、$x^3 \times \dfrac{3x+5}{8} + (x^2+x-2) \times \left(-\dfrac{3x^2+2x+4}{8}\right) = 1$

答　$p(x) = \dfrac{3x+5}{8}$, $q(x) = -\dfrac{3x^2+2x+4}{8}$

4. 行列による計算

互除法の進め方を行列で表し、商を順に使った行列の計算で解 x, y を求めていく。先の方法を思いつく前には、この方法が最も速いかなと思っていた。

$a = r_0, b = r_1$, $r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}$, $r_n = d, r_{n+1} 0$ のように互除法の計算が進んで r_n で最大公約数にいたるものとする。

行列で $\begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$ と表せるから、

逆に解いて $\begin{pmatrix} r_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \end{pmatrix}$

従って、$\begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-2} \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}$

$45x + 32y = 1$ に適用する。先に行った互除法から、$q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

従って、　$x = 5, y = -7$

$311x + 217y = 1$ に適用する。先に行った互除法から、$q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -30 & 43 \end{pmatrix}$$

従って、　$x = -30, y = 43$

3　平成 25 年度大阪大学前期　理系　問５について

高岡高等学校　片山　喜美

８月下旬に、高岡南高校の和泉副校長と学力向上対策のことでお話をしたときに、用件が済んだ後、「大学入試問題研究で大阪大学を担当したが、理系の第 5 問が相当難しかった。」という旨、教えていただいた。

問題

n を 3 以上の整数とする。n 個の球 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ と n 個の空の箱 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ がある。以下のように、$K_1, K_2, \cdots, K_n$ の順番に、球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず、球 K_1 を箱 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる。次に球 K_2 を、箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ、箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に、$i = 2, 3, \cdots, n$ について、球 K_i を、箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ、箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱の」どれか 1 つに無作為に入れる。

(1) K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。

では、ということで、自分でも解いてみたが、箱の埋まり方について、その様子を把握するのに相当苦労した。また、把握したことを解答に結びつけて簡潔に記述することにも苦労した。なんとか自分なりの解答を作った後に、ネット上の予備校の解答例や「大学への数学」の解答を見てみたが、特に (2) はいずれも簡単では無かった。（自分の考え方と異なることもあり、即座に解読することはできないやり方であった。）

さて、この問題で使っているルールは、極めて単純なものである。結果もそうである。ならばと、数学好きの坪池先生（現在　富山県教育委員会県立学校課長）に問題を送り、反応を見てみた。

すると、ほどなく解答が届いた。専門は地歴公民ながらも、いつも数学の問題に独自のアイディアで解答してくださる坪池先生。でも、さすがに今回は難しいかなと思っていたが、すばらしい解法で解決され、感心した。（坪池先生の解法１）

さらに、その後、もっと簡単な解答も知らせてくださった。（坪池先生の解法２）

以下のシンプルな解答は、(2) について、坪池先生のアイディアを踏まえたものである。予備校の解答例や大学への数学の複雑な解答に比べ、計算を全くしていないに等しい。

解答案

(1) 球 $K_i (i \geq 2)$ を入れようとするときに空いている箱は H_1 もしくは、 $H_j\,(j \geq i)$ である。なぜなら、もし　$2 \leq j < i$ を満たす番号の箱 H_j が空であるとすると、球 K_j を入れるときに、この箱に入れていなければならず矛盾するからである。

すると、球 K_n を入れようとするときに空いているのは H_1 もしくは、 H_n である。//

(2) 球を入れる作業を進めていって、球 K_2 から K_{n-2} のうち、自分と違う番号の箱に入るものがあるときは、その中でもっとも大きな番号を j とする。もし、球 K_2 から K_{n-2} が全て自分と同じ番号の箱に入るときには、$j = 1$ とする。

この状況で、球 K_j を箱に入れようとする場面を考察する。

もし、 $j < n-2$ であれば、球 K_j を入れる前に $K_{j+1}, ..., K_{n-2}$ を自分と同じ番号の箱に入れてしまってから球 K_j を入れることにしても差し支えない。

すると、この球 K_j を入れるときに残っている箱は、H_1, H_{n-1}, H_n の 3 つのみで、それらを選ぶ確率は $\dfrac{1}{3}$ ずつである。球 K_j が H_1 もしくは, H_n に入る場合は、 箱 H_{n-1} には球 K_{n-1} が入り、球 K_j が H_{n-1} に入る場合は箱 H_{n-1} には K_{n-1} が入らないことになる。

従って、求める確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

このような考え方に至ると、出題者は、「残り３つの状況でどうなるか」について考えればいいことを知っていてこの問題を作ったのではないいかと思えてきた。この解答案に至るまでを振り返ってみる。

1. 片山の解答

苦労して解いてみた解答は以下のとおり。

(1) 球 K_n は箱 H_1 もしくは、箱 H_n に入る

証明）

- 球 K_1 から順に球を入れていくとき、どこかで 球 $K_i \quad (1 \leq i < n)$ が箱 H_1 に入ったら、そのとき、箱 $H_1, \cdots H_i$ はすべて埋まっている。
  なぜなら、もし箱 $H_j \quad (2 \leq j \leq i)$ が空いていたとしたら、 K_j を入れるときに箱 H_j が空いているのに入れなかったことになり、ルールに反している。
- どこかで 球 $K_i \quad (1 \leq i < n)$ が箱 H_1 に入ったら、その後は、球 K_{i+1} は空いている箱 H_{i+1} に入り、その後の球も自分と同じ番号の箱に入っていく。よって、球 K_n は箱 K_n に入る。
- $K_1, \cdots, K_{n-1}$ がいずれも箱 H_1 に入らなかったとすると、球 K_n を入れるときに空いているのは H_1 だけである。

以上により、球 K_n は箱 H_1 もしくは H_n に入る。//

(2) 箱 H_{n-1} に球 K_{n-1} が入る確率を求めよ。

解）球を入れ終えたとき、球の番号と箱の番号が一致している２以上の番号の集合を A とする。$n-1 \in A$ である。

球の番号が□、□ ････ 、n-1,n となるものを考える。

- 集合 A に含まれる番号を定めると、それに対応する球の入れ方が存在し、しかもただ一通りに定まる。なぜなら、

（ｉ）球 K_1 が箱 H_1 に入るとき、ルールに従って順次並べて $A = \{2, \cdots, n\}$ となる。

（ii）そうでないとき、球 K_1 の入る箱の球は違う番号の箱に入るので、集合 A の補集合 $\bar{A}$ は空集合ではない。 このとき、球 $\bar{A}$ に属する番号を $n_1, \cdots, n_j \quad (1 < n_1 < \cdots < n_j)$ とすると、球 K_1 は H_{n_1} に入る。なぜなら、違う番号の箱に入ったとしたら、球 K_{n_1} を入れようとするときに箱 H_{n_1} が空いていることになり、そこに入れなければいけないので、$n_1 \in A$ となり矛盾。同様に,K_{n_1} は次に小さな番号の箱 H_{n_2} に入り、･･･ 、球 $K_{n_{j-1}}$ は箱 H_{n_J} に入り、最後に球 K_{n_j} が箱 H_1 に入る。すなわち、対応する球の入れ方が存在し、しかも一通りに定まる。//

- 球の番号が□、□ ････ 、n-1,n となるもの全体の確率は $\dfrac{1}{3}$ である。
  集合 A を定めたときに、それに対応する球の並び方の生じる確率を考える。

（ｉ）集合 A に属する番号の球を入れるときには、その番号の箱が空いているのでそこへ必ず入るので確率は 1

（ii）集合 A に属しない番号 j の球を入れるときには、空いている箱の個数は $n-j+1$ であるが、集合 A を定めたとき入れる箱は一通りなので、$\dfrac{1}{n-j+1}$

（iii）従って、$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ とするときの $1, 2, \cdots, n-2$ までの番号の球を入れる確率は、分母を統一して $\dfrac{(n-a_1+1)\cdot(n-a_2+1)\cdot\cdots\cdot(n-a_m+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3}$

（iv）それらの和をとって、

$$\sum_{2 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leq n-2} \frac{(n-a_1+1)\cdot(n-a_2+1)\cdot\cdots\cdot(n-a_m+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3}$$
$$= \sum_{n-1 \geq b_1 > b_2 > \cdots > a_m \geq 3} \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_m}{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3} \qquad (b_j = n - a_j + 1)$$

$$= \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3} \times \{1 + (n-1)\} \cdot \{1 + (n-2)\} \cdot \cdots \cdots (1+3)$$
$$= \frac{1}{3}$$

- 球の番号が n、□ ···· 、n-1, □ となるもの全体の確率も同様に $\frac{1}{3}$ である。

以上により、求める確率は $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

＜備考＞

並び方は、$2, 3, \cdots, n$ のうち、球の番号と箱の番号が一致するものを決めるごとに、それに対応して存在して、しかも、唯一通りに決まる。（番号が食い違うものを 1 を含めて小さい順に並べて、球は 1 つ右隣の番号の（最大の番号の球は 1 番小さい番号の）箱に入る。）このため、並べ方の総数は、番号の選び方の総数に等しいので、 ${}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$ となる。

2. 坪池先生の解法 1

送っていただいた解答に少し言葉を付け足して、以下に紹介する。（最小限の記述だったものを解読したので、本人の意図と多少ずれているかもしれない。）

(1) 球 K_n は箱 H_1 もしくは、箱 H_n に入る

証明）球の入れ方を次のように考える。

- まず、箱 $H_2, \cdots, H_{n-1}$ に、球 $K_2, \cdots, K_{n-1}$ を番号どおり順に入れておく。球 K_1, K_n は手元に置いておく。
- 球 K_1 を入れる箱を無作為に選ぶ。それが H_1 ならば、球 K_n は箱 H_n に入って終わり。また、それが H_n ならば、球 K_n は箱 H_1 に入って終わり。選んだ箱が $H_i \quad (2 \leq i \leq n-1)$ ならば、箱 H_i に入っている球 K_i を取り出して、代わりに K_1 をいれる。
- このとき、空いている箱は H_1 と H_n で、手元にある球は K_i と K_n である。
- 次に、手元の球 K_i を入れる箱を考えると、問題のルールから、それは H_1, H_n もしくは $H_j \quad (i < j \leq n-1)$ に限られる。それが H_1 ならば、球 K_n は箱 H_n に入って終わり。また、それが H_n ならば、球 K_n は箱 H_1 に入って終わり。選んだ箱が $H_j \quad (i < j \leq n-1)$ ならば、箱 H_j に入っている球 K_j を取り出して、代わりに K_i をいれる。
- この操作後、空いている箱は H_1 と H_n で、手元にある球は K_j と K_n である。そのため、上記と同様の操作を次に行っていく。手元にある K_n 以外の球の番号が順次大きくなるので、操作はいずれ終わるが、その終わり方は、 球 K_j が H_1 に入り球 K_n が箱 H_n に入る、もしくは、球 K_j が H_n に入り球 K_n が箱 H_1 に入る、である。//

(2) 箱 H_{n-1} に球 K_{n-1} が入る確率を求めよ。

解）

- 箱 H_n に球 K_n が入らない確率 p_n は $\frac{1}{2}$ である。

  なぜなら、上記の手順で K_n 以外で最後に入れる球を K_j とすると、それが H_1 に入るか H_n に入るか、確率は $\frac{1}{2}$ ずつで、それによって K_n が H_n に入るか H_1 に入るか決まる。
- 箱 H_{n-1} に球 K_{n-1} が入らない確率を p_{n-1} とすると、$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + p_{n-1}$ が成り立つ。箱 H_n に球 K_n が入らないとき、箱 H_{n-1} に入っている球は、 K_{n-1} 以外である、もしくは、 K_{n-1} である、のいずれかである。

（ｉ）箱 H_{n-1} に入っている球が K_{n-1} 以外のとき

それは、K_n 以外で最後に入れる球が K_{n-1} で、それが箱 H_n に入るときであるから、その確率は $\frac{1}{2}p_{n-1}$

(ii) 箱 H_{n-1} に入っている球が K_{n-1} のとき

それは、K_n 以外で最後に入れる球 K_j $(j < n-1)$ が H_n に入るときである。このとき、その球 K_j が箱 H_n の代わりに箱 H_{n-1} に入り、 K_{n-1} が箱 H_1 へ入ったものと H_n へ入ったものを併せたものと同じ確率になる。従って、この場合の確率は p_{n-1} に等しい。

以上により、$p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + p_{n-1}//$

- 上式より、$\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}p_{n-1}$ $\therefore p_{n-1} = \dfrac{1}{3}$ 従って、求める確率は $1 - p_{n-1} = \dfrac{2}{3}$

<備考>

- 坪池先生は、$p_i = \dfrac{1}{n-i+2}p_{i-1} + p_{i-1}$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$ についても触れて、 K_1 についての値を元に、すべての i について、 K_i が H_i に入る確率を求めていらっしゃる。
- 「大学への数学」の安田亨先生のアイディアによる解答は、やはり K_i が H_i に入らない確率を考察しているが、それを K_1 からはじめて、その結果 K_i がどうなるかを計算するので、複雑になっている。
- それに比べて、坪池先生は、 p_{n-1} を p_n に結びつけること、そして、 $p_n = \dfrac{1}{2}$ であることを、ご自身の球の入れ方のアイディアから導いていいらっしゃるので、極めて簡単な計算で答えに到達している。 シンプルな原理で解決できる方がすばらしい。

3. 坪池先生の解法２

坪池先生から最初の解答をいただいて、解法１のように書き直してお知らせしたところ、「綺麗に形を整えていただいた解答を読みながら内容は分かるのだけれど、イメージが違うんだけどと思いながら別解（別の考え方）を思いつく至りました。」と、新たなアイディアでの解答を知らせていただいた。そのアイディアをくみ取って、作成してみたのが以下の解法である。ポイントは、「残り３つになった時点での状況を考える」ということである。そこからの確率だけが問題で、そこに至るまでの確率の計算が不要なところがすばらしい。
球の入れ方は、次のような操作を行うことと等しい。

(1) 箱 H_2 から H_n に箱の番号と同じ番号の球を入れる。また、白を上にしたオセロを１枚ずつ入れる。

(2) 球 K_1 を持ったツボ君が H_2 から H_{n-2} まで順に箱を訪れる。各箱毎に、

(i) 何もしないで次の箱へ進む
※この箱を飛ばして行くのと同じこと。

(ii) 持っている球と箱の中の球を取り替えるとともに、オセロを黒にひっくり返して、次の箱へ進む。

(3) そして、ついにツボ君は箱 H_{n-2} に達して、その箱に対する作業をやり終える。(何もしないか、球を取り替えオセロをひっくり返すか)

(4) 上記を終えたツボ君は、この後、以下いずれかを行う。

(i) 箱 H_1 へ飛んで持っている球を入れる。作業は終わる。(この箱にはオセロを入れていない)

(ii) 箱 H_{n-1} へ進んで、球を取り替え、オセロを黒にひっくり返す。
注意：H_{n-1} へ進んでも球をとりかえないのは、次のに含める。

(iii) 箱 H_n に進む。

なお、(ii)、(iii) の場合は、もう１〜２回作業が続いて終わる。

上記の動作を問題の設定の球の入れ方に翻訳すると、上記 (i) 〜 (iii) への進み方はいずれも $\frac{1}{3}$。そのうち、H_{n-1} に K_{n-1} が入るのは (i) と (iii) をあわせたものだから、求める確率は $\frac{2}{3}$

＜備考＞

- オセロ無しでやっても差し支えない。
  オセロの白黒が、片山の解答における「番号の一致するものの集合、しないものの集合」に対応する。
- 並べ方が２の n-1 乗通りになることを、ツボ君がオセロを白・黒いずれにするか２通りずつであることから説明できる。

ーー

＜参考＞坪池先生からの解答概略

まず、試行について、

１　H (1)～H (n) を i の小さい順に左から右に並べる。

２　K(2)～K (n) をH (1)～H (n) にそれぞれの番号にオセロの駒を置く。

３　K(1) を無作為にH (1)～H (n) のオセロの駒にぶつけ、

　ぶつかったら駒を白から黒にし、H(1) 又は i より大きい (右側の) H (i) に無作為にぶつけ、駒を白から黒にする。

　（動くのはK(1) で入れ替えはしない。）

４　K(1) がH (1) のオセロの駒を黒にするまで続ける。

そこで、(2) の解答H (2)～H (n-2) まで間をK (1) が動いて、そこから外に出るのは、H (1) か、H (n-1) か、H (n) かのいずれかであり、それぞれ、確率は１／３である。

また、H (1)、H (n-1)、H (n) に直接、K (1) が入るのはそれぞれ１／n であることから、２／３

ーー

受験問題としての適・不適や受験問題としての解法とは別に、いろいろ考えてみることもなかなかおもしろいのではないかという問題であった。