平成24年度　第１回キトキト数学資料

平成 24 年 12 月 8 日 (土)

富山県立高岡高等学校　片山　喜美

目 次

1　ある三角形の角の２等分線の余弦定理による計算について　**2**

2　等差数列×等比数列　を一般項とする数列の和の計算について　**4**

3　１つおきにドアを開ける問題について　**6**

4　ラグランジュの補間公式とニュートンの補間公式について　**10**

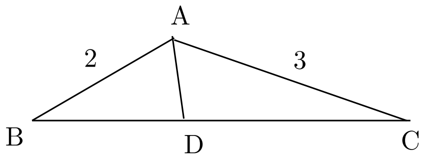
1　ある三角形の角の２等分線の余弦定理による計算について

高岡高等学校　片山喜美

次の問題の解法について考察する。

問題

$AB=2,\ AC=3,\ \angle A=120^\circ$ である $\triangle ABC$ の $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 AD の長さを求めよ。



授業では、$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$ を用いて、
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot AD\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot AD\sin 60^\circ$　から　$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}AD$ 。
従って、$AD=\frac{6}{5}$ という解法を強く指導する。

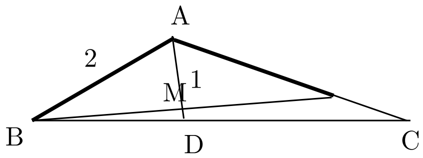
一方、次のような解法を試みる生徒も多い。

- まず、余弦定理で $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=4+9-12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19$
  したがって、 $BC=\sqrt{19}$
- $BD:DC=AB:AC=2:3$ であるから、$BD=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{5}\sqrt{19}$
- $\triangle ABD$ で余弦定理より、$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD$
  $\frac{4}{25}\cdot 19=2^2+x^2-4x\cdot\cos 60^\circ$
  この 2 次方程式を解くと、$x=\frac{4}{5},\ \frac{6}{5}$ という 2 つの解の候補を得る。

ここで問題は、AD の長さは上で得られた 2 つのうちのいずれなのか決定すること。それには、次のような 2 つの方法があるということだった。

1. 点 A から辺 BC へ下ろした垂線 AD を計算し、それより長い値の方を正解とする。
   ($\cos B$ を求めるなどが必要)
2. 上記と同様に $\triangle ADC$ で余弦定理を用いて立式して、$AD=x$ の 2 つの解を得ると、上記の解と一致するのは、$\frac{6}{5}$

しかしながら、これらの方法のいずれも計算がそこそこ（かなり？）必要となる。
もっと簡単に、わかりやすく判定できる方法がないか、しばらく考えたのが以下のもの。



辺 AC 上に、 $AE=AB$ を満たす点 E を取り、$AD,\ BE$ の交点を M とすると、
$AB=2,\ \angle BAM=60^\circ,\ \angle BMA=90^\circ$ の直角三角形ができる。$AD>AM=1$ より $AD=\frac{6}{5}$

と判定できる。
もし、$\triangle ADC$ で余弦定理を考えるとしたら、辺 AB の延長上に $AF = AC$ となる点 F を取り、FC と AD の延長の交点 N を取って、直角三角形 ANC の辺 $AN > AD$ で判定すればよい。
(2012 年 11 月)

2　等差数列×等比数列　を一般項とする数列の和の計算について

高岡高等学校　片山　喜美

等差×等比を一般項とする数列の和
$S = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots\cdots + \{a+(n-1)d\}r^{n-1}$
については、和に等比数列の部分の公比をかけたものを差し引いた $S - rS$ に等比数列の和が現れるので、それに和の公式を適用するのが標準的な計算方法である。ここでは、もう少し素早く正確に計算できるのではという方法について少し考察してみた。

1. 数列の和　$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + nx^{n-1}$　$(x \neq 1)$
教科書にある標準的な計算法は、

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & S = & 1 & +2x & +3x^2 + \cdots\cdots\cdots & +nx^{n-1} & \\
-) & -xS = & & x & +2x^2 + \cdots\cdots\cdots & +(n-1)x^{n-1} & +nx^n \\
\hline
 & S - xS = & 1+ & x & +x^2 + \cdots\cdots\cdots & +x^{n-1} & -nx^n
\end{array}$$

従って、

$$(1-x)S = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n = \frac{(1-x^n) - nx^n(1-x)}{1-x} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x}$$

よって、$S = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ となる

この計算の注意事項としては、$S - xS$ の計算の右辺で

- 最後の $-nx^n$ の符号がマイナスではなく、プラスと間違えないこと。
- $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ を等比数列の和であると認識し、和の公式を適用すること。初項と公比及び項数を押さえる。
- 和の公式で $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ を使ったとすれば、最後に $\dfrac{-1+(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)(x-1)}$ という中途半端な式で終わらないこと。

さて先日、北陸四県数学教育研究大会の公開授業でこの題材を解説しているのを見ていて、ふと、以下のようなもう一度 x をかけて差し引く計算はどうだろうかと思いついた。

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & S = & 1 & +2x & +3x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +nx^{n-1} & & \\
-) & xS = & & x & +2x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +(n-1)x^{n-1} & +nx^n & \\
\hline
 & (1-x)S = & 1 & +x & +x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +x^{n-1} & -nx^n & \\
-) & x(1-x)S = & & x & +x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +x^{n-1} & +x^n & -nx^{n+1} \\
\hline
 & (1-2x+x^2)S = & 1 & & & & & -(n+1)x^n & +nx^{n+1}
\end{array}$$

よって、$S = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ とできる。

この計算方法では、上記注意事項の２、３番目は上手く回避できる。
もう少し比較してみる。

2. 　$S = 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1}$　$(x \neq 1)$
□教科書にある標準的な計算法

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & S = & 1 & +3x & +5x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +(2n-1)x^{n-1} & \\
-) & xS = & & x & +3x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +(2n-3)x^{n-1} & +(2n-1)x^n \\
\hline
 & (1-x)S = & 1 & +2x & +2x^2 & + \cdots\cdots\cdots & +2x^{n-1} & -(2n-1)x^n
\end{array}$$

従って、

$$\begin{aligned}(1-x)S &= 2+2x+2x^2+\cdots\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n-1\\ &= \frac{2(1-x^n)}{1-x}-(2n-1)x^n-1\\ &= \frac{2(1-x^n)-(2n-1)x^n(1-x)-(1-x)}{1-x} = \frac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

よって、$S=\dfrac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$ となる

この計算では、$S-xS$ の右辺で

- 等比数列の和公式を用いるために、右辺の第１項を１から２に変え、最後に－１とする工夫などが要る。
- 通分で計算を正確にする必要がある。

□もう一度 x をかけて差し引く計算法

$$\begin{array}{lrcccccc} & S= & 1 & +3x & +5x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(2n-1)x^{n-1} & & \\ -) & xS= & & x & +3x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(2n-3)x^{n-1} & +(2n-1)x^n & \\ \hline & (1-x)S= & 1 & +2x & +2x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +2x^{n-1} & -(2n-1)x^n & \\ -) & x(1-x)S= & & x & +2x^2 & +\cdots\cdots\cdots & +2x^{n-1} & +2x^n & -(2n-1)x^{n+1} \\ \hline & (1-2x+x^2)S= & 1 & +x & & & & -(2n+1)x^n & +(2n-1)x^{2n+1}\end{array}$$

よって、$S=\dfrac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$ となる

この計算の方が早くて正確にできるのではないかと思うが、どうだろうか。

数値の問題ではどうか。

3. $S=1\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 2^2\cdots\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$

□標準的な方法

$$\begin{array}{lrcccccc} & S= & 1\cdot 1 & +4\cdot 2 & +7\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-2)\cdot 2^{n-1} & \\ -) & 2S= & & 1\cdot 2 & +4\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-5)\cdot 2^{n-1} & +(3n-2)\cdot 2^n \\ \hline & -S= & 1 & 3\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +3\cdot 2^{n-1} & -(3n-2)\cdot 2^n\end{array}$$

従って、$-S=3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots\cdots+3\cdot 2^{n-1}-(3n-2)\cdot 2^n-2$

$$=\frac{3(2^n-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot 2^n-2=-(3n-5)2^n-5$$

よって、$5+(3n-5)2^n$

□２度差し引く方法

$$\begin{array}{lrccccccc} & S= & 1\cdot 1 & +4\cdot 2 & +7\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-2)\cdot 2^{n-1} & & \\ -) & 2S= & & 1\cdot 2 & +4\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +(3n-5)\cdot 2^{n-1} & +(3n-2)\cdot 2^n & \\ \hline & -S= & 1 & 3\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +3\cdot 2^{n-1} & -(3n-2)\cdot 2^n & \\ -) & -2S= & & 1\cdot 2 & +3\cdot 2^2 & +\cdots\cdots\cdots & +3\cdot 2^{n-1} & +3\cdot 2^n & -(3n-2)\cdot 2^{n+1} \\ \hline & S= & 1 & +2\cdot 2 & & & & -(3n+1)\cdot 2^n & +(3n-2)\cdot 2^{n+1}\end{array}$$

従って、$S=5-(3n+1)2^n+(3n-2)2^{n+1}=5+\{-(3n+1)+2(3n-2)\}2^n=5+(3n-5)2^n$

3　１つおきにドアを開ける問題について

高岡高等学校　片山　喜美

平成 24 年 7 月に、以下のような問題が職員室で少し話題になり、何人かの先生で考えてみた。（オリジナルの問題は、表現が多少異なるかもしれない。）

問題

1〜1024 番までの番号がついたドアが並んでおり、最初はすべて閉じている。

まず、1 番のドアから 3 番、5 番、… 、1023 番まで、１つおきに開けていく。

次に、閉じている中で最も番号が大きい 1024 番から始めて、番号の小さい方へ向かって、閉じているドアを 1 つおきに 4 番まで開けていく。

以降、同様に 1 つおきに開けていくことを繰り返す。閉じているドアで最後に残るのは何番か？

少ない個数のドアで少し様子を掴んでみる。

- 2 番までの場合
  1 番を開けて終わりなので、残るのは 2 番
- 4 番までの場合
  まず、1,3 番を開ける。次に 4 番を開ける。残るのは 2 番
- 8 番までの場合
  まず、1,3,5,7 番を開ける。次に 8,4 番を開ける。そして 2 番を開ける。残るのは 6 番
- 16 番までの場合
  まず、1,3,5,7,9,11,13,15 番を開ける。16,12,8,4 番を開ける。2,10 番を開ける。14 番を開ける。
  残るのは 6 番

(1) **$mod\, 2^k$ による考察を用いた解法**

ドアの番号を 1〜2^N と一般化して考える。

- まず開けるドアは、$1, 3, \cdots\cdots, 2^N - 1$ であり、その番号 n とすると、$n \equiv 1 \pmod 2$
- 次に開けるドアは、$2^N, 2^N - 4, \cdots, 4$ であり、 $n \equiv 0 \pmod 4$
- 次に開けるドアは、$2, 10, \cdots, 2^N - 6$ であり、 $n \equiv 2 \pmod 8$
- 次に開けるドアは、$2^N - 2, 2^N - 18, \cdots, 14$ であり、 $n \equiv -2 \pmod{16}$

　　　　……….

これらの動作を考えてみると、k 回目のステップで開けるドアの番号 n について、

$$n \equiv 1 - 1 + 2 - 2^2 + \cdots - (-2)^{k-2} \equiv 1 - \frac{1 - (-2)^{k-1}}{1+2} \equiv \frac{2 + (-2)^{k-1}}{3} \pmod{2^k}$$

となることがわかる。（それぞれ、端まで来たときの動作をきちんと押さえて記述するとよい。）

ドアの個数が 2^N の場合は、N ステップやると、残りが 1 つとなるが、最後に開くドアについて、

$$n \equiv \frac{2 + (-2)^{N-1}}{3} \pmod{2^N}$$

(a) N が奇数の時 $0 < \dfrac{2+(-2)^{N-1}}{3} < 2^{N-1}$ であるから、最後に残るドアの番号は、

$$\frac{2+(-2)^{N-1}}{3} + 2^{N-1} = \frac{2+4\cdot 2^{N-1}}{3} = \frac{2+2^{N+1}}{3}$$

(b) N が偶数の時 $0 > \dfrac{2+(-2)^{N-1}}{3} > -2^{N-1}$ であるから、最後に残るドアの番号は、

$$\frac{2+(-2)^{N-1}}{3} + 2^{N-1} = \frac{2-2^{N-1}+3\cdot 2^{N-1}}{3} = \frac{2+2^{N}}{3}$$

2^N	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
残るドアの番号	2	2	6	6	22	22	86	86	342	342

従って、ドアが 1024 の場合、最後に残るのは 342 番である。
この解法は片山による。少し堅物の解答である。

(2) **2 進法による解法**

ドアの番号を 1〜1024 とする代わりに 0〜1023 とする。それを 2 進法で表すと、0000000000〜1111111111 となる。

- 1 回目のステップで 0 から始めて開けるドアの番号は、すべて偶数であるから、残るのは奇数である。
  従って最後に残るドアの番号の 2 進数表示の下から一桁目は 1 である。
- 2 回目のステップは、残ったもののうち、右端の 1111111111 から始めて十進で 4 番違い、2 進では 100 違いで開けていくので、下から 2 桁目が 1 のものがすべて開けられ、0 のものがすべて残る。従って、最後に残る番号の下から 2 桁目は 0 である。
- 同様に考えて、$2k-1$ 回目のステップでは、開け始めるのが、残ったもののうち一番左端で、下から $2k-1$ 桁目が 0 で、開ける間隔は 2 進で 10^{2k-1} であるから、残るドアの番号の下から k 桁目は 1 である。また、$2k$ 回目のステップでは、開け始めるのが、残ったもののうち一番右端で、下から $2k$ 桁目が 1 で、開ける間隔は 2 進で 10^{2k} であるから、あるから、残るドアの番号の下から k 桁目は 1 である。

以上より、残るのは、下の桁から順に 1 と 0 を順に繰り返したものである。
1024 の場合は、0101010101 であり、十進に直すと、$1+4+16+64+256 = 341$ となる。それを 1〜1024 に直すと、342 番となる。
きれいな解法で、何か情報分野の何かしらの問題に関わっているものなのかもしれない。出題の元ネタがそういうところにあるかもしれない。

注意

- 1〜1024 で考えるとすると、2 進法では 0000000001〜1000000000 となる。
  これを、下の桁から残るものを考えていくと、1 桁目は消し始めが 1 より残るのは 0、2 桁目は消し始める右端が 0 より残るのは 1、3 桁目は消し始める左端が 0 より残るのは 1、以下 0 と 1 が交互。従って、0101010110 となり、十進で 342 番となる。
  規則性でいうと、下から 2 桁目と 3 桁目に切り替わりがないので、0〜1023 としたほうが綺麗になる。
- 3^N 個のドアで、2 つ開けては 1 つ飛ばして行くことにする問題とすると、0〜3^N-1 を 3 進で考え、残るものは下の桁から 2 と 0 が交互に並ぶものとなる。

(3) 漸化式による解法

漸化式を用いる解法は、Y先生による。
この解法ではドアを開ける動作「一往復」を単位として考える。そのため、ドアの個数を 4^N 個とする。

- ドアの個数が 4 の時は、まず 1,3 番を開け、次に 4 番を開けるので残るのは 2 番である。
- ドアの個数が 16 の場合は、まず、奇数番を開け、その後 16,12,8,4 番を開けるので、その時点で残るのは、2,6,10,14 番である。
  - そのうち、2 番はドアの個数 4 の場合に残ったものである。6,10,14 番は、ドアの番号 5〜16 番の所から生き残ったものである。
  - 2,6,10,14 番の番号の間隔は、一往復の後であることから $4^1 = 4$ となっている。
  - 2,6,10,14 番の 4 つからもう一往復して残るのは、ドアの個数 4 個の時と同様に、左から 2 つ目のもの、すなわち 6 番である。
- ドアの個数が 4^N のとき、最後に残るドアの番号を a_N とする。そして、ドアの個数が 4^{N+1} の場合を 4^N の場合に結びつけて考える。
  - 操作を N 往復すると、残るドアは 4 個。
  - その一番左は、ドアの個数 4^N の時の最後に残るものである。
    （$4\,N+1$ 個のドアへの操作を 1 から 4^N の部分だけに限定して考えればわかる。）
  - 4 つの番号の間隔は、 N 往復の操作の後であるから 4^N である。
  - もう一往復すると、最後に残るのは左から 2 つ目である。従って、 $a_{N+1} = a_N + 4^N$ が成り立つ。

以上の考察から、 $a_N = a_1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{N-1} = 2 + \dfrac{4(4^{N-1}-1)}{4-1} = \dfrac{4^N+2}{3}$

4^N	4	16	64	256	1024
残るドアの番号	2	6	22	86	342

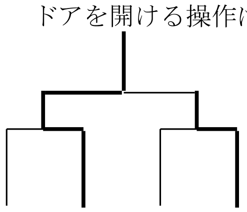
従って、ドアが 1024 の場合、最後に残るのは 342 番である。

(4) トーナメント表による解法

この解法は、氷見高校の坪池校長先生によるものである。坪池先生の専門は社会であるが、数学が好きで、これまでもいくつかの問題を独特の解法で解決されており、いつも感心させられる。平成 24 年 8 月終わり頃、この問題を坪池校長にお知らせしたところ、程なく「解けた！」とお電話をいただいた。その方法は以下のようなものであった。

問題を 1024 人によるトーナメントに結びづけ、ドアを開くことを試合で負けることだとして勝ち上がりを考える。

なお、、トーナメント表で左端が 1 番で、順に 2,3, ⋯ ,1024 番と並んでいるものとする。
ドアを開ける操作はトーナメントでは以下のようになる。

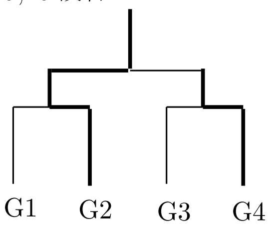


(1) まず、対戦の右側が勝ち上がる。
(2) 次の対戦では、左側が勝ち上がる。

この繰り返しになる。

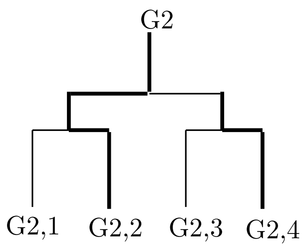
$1024 = 2^{10}$ であるから、10 段のトーナメントになり、上記 (1)(2) が 5 回繰り返されることになる。

(a) 9,10 段目



9 段目に勝ち残っている 4 人は、左から順に 1〜256 番、257〜512 番、513〜768 番、769〜1024 番のグループに属している。これらのグループを G_1, G_2, G_3, G_4 と名付けると、最後に勝ち上がるのは、この 2 段に上記 (1)(2) の勝ち上がりを適用して、G_2 である。

(b) 7,8 段目



G_2 のトップに勝ち上がるまでの 7,8 段目の 4 人が属するグループを $G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, G_{2,4}$ とすると、前と同様、勝ち上がるのは左から 2 番目の $G_{2,2}$ である。

このとき、このグループ $G_{2,2}$ より左にいる人数＝ G_1 の人数＋ $G_{2,1}$ の人数＝ 256+64 ＝ 320 人

(c) 1 段目まで

上記と同様に 5,6 段目では $G_{2,2,2}$ （その人数は 16 人）、3,4 段目では $G_{2,2,2,2}$ （その人数は 4 人) が残り、1,2 段目では $G_{2,2,2,2}$ の 4 人のうち、左から 2 番目の人が勝ち上がる。

この人が最後に残る人であるから、各グループより左にいる人数を考えて、256+64+16+4+2=342 番である。

4　ラグランジュの補間公式とニュートンの補間公式について

高岡高等学校　片山喜美

２０１２年のイリノイ大学 Mock putnam Exam に次の問題が出題された

問題

次の３つの条件を満たす n 次多項式 $P(x)$ が存在する正の整数 n を全て求めよ。
(i) $k=1,2,\cdots,n$ について $P(k)=k$　　(ii) $P(0)$ は整数　　(iii) $P(-1)=2012$

この問題について、自分はまずラグランジュの補間公式を用いて解答を作成した。この補間公式は何かの本で証明にあったと思うが、これまで自分で使ったことがないなどなじみが薄く、そもそも「ラグランジュの」という名前であったかどうかも自信がないのであった。そこでネットで検索・確認し、さらにニュートンの補間公式というのもあることを知った。それを用いると Mock Putnam Exam の問題の解答が簡単にできることがわかった。こうしたことから、この機会に補間公式について少しメモしておく。

なお、ここで補間公式というのは、$P(a_0)=b_0,\ P(a_1)=b_1,\ \cdots\cdots,\ P(a_n)=b_n$ をみたす高々 n 次の式 $P(x)$ を求める公式のことをいう。これは一般の関数 (多項式とは限らない) $f(x)$ の $x=a_0,\ a_1,\ \cdots\cdots,\ a_n$ における値 $b_0,\ b_1,\ \cdots\cdots,\ b_n$ と同じ値をとる多項式を求めるということである。

(1) ラグランジュの補間公式

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)}{(a_k-a_0)(a_k-a_1)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}$$

この $P(x)$ は高々 n 次の式であり、$P(a_k)=b_k$ を満たすことを確かめることは容易である。そして、次数と方程式の解の個数の関係から高々 n 次の式で条件を満たすものはこの $P(x)$ に限ることが言える。

(a) $P(1)=3,\quad P(2)=5$ を満たす 1 次式

$$P(x)=3\cdot\frac{x-2}{1-2}+5\cdot\frac{x-1}{2-1}=(-3x+6)+(5x-5)=2x+1$$

(b) $P(1)=3,\quad P(2)=5,\quad P(3)=11$ を満たす 2 次式

$$P(x)=3\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+5\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+11\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$
$$=\frac{3(x^2-5x+6)}{2}+\frac{5(x^2-4x+3)}{-1}+\frac{11(x^2-3x+2)}{2}$$
$$=2x^2-4x+5$$

(2) ニュートンの補間公式

$P_0(x)=b_0,\qquad P_k(x)=P_{k-1}(x)+c_k(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})$

ただし、$P_{k-1}(a_k)+c_k(a_k-a_0)(a_k-a_1)\cdots(a_k-a_{k-1})=b_k$ から c_k を順次決めていく。すると $P(x)=P_n(x)$ が求める補間公式になる。

(a) $P(1)=3,\quad P(2)=5$ を満たす 1 次式

$P_0(x)=3, P_1(x)=3+c_1(x-1)$ で $P_1(2)=3+c_1(2-1)=5$ より $c_1=2$ となる。
従って $P_1(x)=3+2(x-1)=2x+1$

(b) $P(1)=3,\quad P(2)=5,\quad P(3)=11$ を満たす 2 次式

$P_2(x)=P_1(x)+c_2(x-1)(x-2)$ で $P_2(3)=7+c_2(3-1)(3-2)=11$ より $c_2=2$ となる。従って $P_2(x)=2x+1+2(x-1)(x-2)=2x^2-4x+5$

ラグランジュの補間公式は条件から一挙に式を求めるのに対して、ニュートンの補間公式は順に次数を上げていく方法であり、段階を踏まなくてはいけない分手間がかかるが、場合によってはそれまでの結果を上手く利用できる利点がある。

(3) **$n=1,2$ の場合における Mock Putnam Exam の問題にかかる多項式**

(a) ラグランジュの補間公式を用いる方法

- $n=1$

  $P(x)=2012\cdot\dfrac{x-1}{-1-1}+1\cdot\dfrac{x+1}{1+1}=\dfrac{-2012x+2012}{2}+\dfrac{x+1}{2}=-\dfrac{2011}{2}x+\dfrac{2013}{2}$

  $P(0)$ は整数とならないので不適
- $n=2$

  $P(x)=2012\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+1\cdot\dfrac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}+2\cdot\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$

  $P(0)=2012\cdot\dfrac{2}{6}+1\cdot\dfrac{-2}{-2}+2\dfrac{-1}{3}=\dfrac{2012+3-2}{3}=\dfrac{2013}{3}=671$ より適する。

(b) ニュートンの補間公式を用いる方法

$x=-1$ を最後にまわす方が綺麗にできる。記号の使い方についても、最初のものを $P_1(x)$ として、$P_n(x)$ の次に $P(x)$ を得るものとする。

- $n=1$

  $P_1(x)=1,\quad P(x)=P_1(x)+c(x-1)$ で $P(-1)=1+c(-1-1)=2012$ より $c=-\dfrac{2011}{2}$

  従って、$P(0)=1-\dfrac{2011}{2}\cdot(-1)=\dfrac{2013}{2}$ は整数とならないので不適
- $n=2$

  $P_2(x)=P_1(x)+c_2(x-1)=1+c_2(x-1),\qquad P_2(2)=1+c_2(2-1)=2$ より $c_2=1,\qquad P_2(x)=1+(x-1)=x$

  $P(x)=P_2(x)+c(x-1)(x-2)=x+c(x-1)(x-2),\qquad P(-1)=-1+c(-1-1)(-1-2)=-1+6c=2012$ より $c=\dfrac{2013}{6}$

  $P(0)=0+\dfrac{2013}{6}\cdot(-1)(-2)=\dfrac{2013}{3}=671$ より適する。

(4) **Mock Putnam Exam 問題の解**

結論は、「 $P(0)=\dfrac{2013}{n+1}$ が整数となるような 正の整数 n 」である。$2013=3\cdot11\cdot61$ であるから、その約数を考えて、1 を引いて、$n=2,10,32,60,182,670,2012$ である。以下に、$P(0)=\dfrac{2013}{n+1}$ となることを示す。

(a) ラグランジュの補間公式を用いる方法

まずこの方法で解いたのであった。途中、二項係数の性質を用いるが、少し変形に苦労する。

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{(x+1)(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k-1)\cdots(x-n)}{(k+1)(k-1)(k-2)\cdots1\cdot(-1)(-2)\cdots(k-n)}$$
$$+2012\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n)}$$
$$P(0)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1(-1)(-2)\cdots(-k+1)(-k-1)\cdots(-n)}{(k+1)(k-1)(k-2)\cdots1\cdot(-1)(-2)\cdots(k-n)}$$

$$+2012\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}k\cdot n!\cdot}{(k+1)!\cdot(-1)^{n-k}(n-k)!}+\frac{2012}{n+1}$$

ここで、$\dfrac{k\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}$

$$=\frac{(k+1)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}-\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\{(n+1)-(k+1)\}!}$$

$$={}_nC_k-\frac{1}{n+1}\cdot{}_{n+1}C_{k+1}$$

従って、上記の $P(0)$ の第 1 項の和の部分は

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot{}_nC_k-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot{}_{n+1}C_{k+1}$$

$$=-\{(1-1)^n-1\}-\frac{1}{n+1}\left\{(1-1)^{n+1}+{}_{n+1}C_0-{}_{n+1}C_1\right\}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\{1-(n+1)\}=\frac{1}{n+1}$$

よって、$P(0)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2012}{n+1}=\dfrac{2013}{n+1}$

(b) ニュートンの補間公式を用いる方法

まず、$P_1(x)=1$ から始め、$P_2(x)=1+c_2(x-1)$ が $P(2)=2$ を満たすようにすると、$P_2(x)=x$ となることを前に示した。

$P_3(x)=P_2(x)+c_3(x-1)(c-2)=x+c_3(x-1)(c-2)$, 　$P_3(3)=3$ とすると　$c_3=0$ で、$P_3(x)=x$ となる。

以下同様なことを繰り返して、$P_n(x)=x$ である。

従って、$P(x)=P_n(x)+c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)=x+c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ である。

$P(-1)=2012$ より、$-1+c(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n)=-1+c\cdot(-1)^n(n+1)!=2012$, 　　$c=(-1)^n\dfrac{2013}{(n+1)!}$

$$P(x)=x+(-1)^n\frac{2013}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$$P(0)=0+(-1)^n\frac{2013}{(n+1)!}(-1)(-2)\cdots(-n)=(-1)^n\frac{2013}{(n+1)!}(-1)^n n!=\frac{2013}{n+1}$$

※天下り的に $P(x)=x+c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ から始めて、$P(-1)=2012$ に進んでしまうのが模範解答になるかもしれない。

　$P(1)=1, P(2)=2,\cdots P(n)=n$ を満たす最も簡単な式が x であるから、それに $x=-1$ の値を調整するための項 $c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ を加えればよい、と言われればなるほどそうである。

補間公式を用いると大学入試問題の解法に役立つかどうかは不明。今後、機会が有れば使ってみるかというところ。(2012 年 11 月 11 日)