差分による数列の和の工夫について

平成29年度冬
富山県立福岡高等学校
片山　喜美

数列 $\{a_n\}$ の和　$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$　を考える。

もし、$a_n = b_{n+1} - b_n$ を満たす数列 $\{b_n\}$ を見つけることができると、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k$$
$$= (b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_n + b_{n+1}) - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_n) = b_{n+1} - b_1$$

となることから、 a_n の和が簡単に計算ができる。部分分数分解はそのよい例である。

数列　$\{a_n\}$ が数列 $\{b_n\}$ の差分として、$a_n = b_{n+1} - b_n$ と表されるとき、その和は次のような計算で求められる。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1$$

注意:：　$a_n = b_n - b_{n+1}$ と表されるときは、 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - b_{n+1}$ となる。

この変形を用いた数列の和の求め方について、いくつか考えてみる。

1　部分分数展開

(1) $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$　のとき

$a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ より、 $b_k = \dfrac{1}{k}$ であり、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(2) $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$　のとき

$$a_k = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

より、 $b_k = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{k(k+1)}$ であり、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=b_1-b_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

一般に、

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}=\frac{1}{m}\cdot\frac{(k+m)-k}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}$$
$$=\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right\}$$

であるから、$b_k=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}$ とおいて計算して、次の等式を得る。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}=\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right\}\quad (m\in\mathbb{N})}$$

(3) $a_k=\dfrac{1}{k(k+2)}$ 　のとき

２通りの方法について考える。

i) $a_k=b_k-b_{k+2}$ による計算

$a_k=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ であるから、$b_k=\dfrac{1}{2k}$ と置いて、 $a_k=b_k-b_{k+2}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+2})$$
$$=(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)-(b_3+b_4+\cdots\cdots+b_n+b_{n+1}+b_{n+2})$$
$$=b_1+b_2-b_{n+1}-b_{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$$
$$=\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

ii) $a_k=b_k-b_{k+1}$ による計算

$\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{ak+b}{k(k+1)}-\dfrac{a(k+1)+b}{(k+1)(k+2)}$ と置いてみる。

通分して、分子を比べると、

$$(ak+b)(k+2)-\{a(k+1)+b\}k=k+1, \quad ak+2b=k+1$$

よって、$a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$ $\qquad b_k=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k+1}{k(k+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=b_1-b_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{3(n^2+3n+2)-(4n+6)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

※このような計算方法は、教科書や傍用問題集等であまり見かけないと思う。一つ飛びの差にしかできないと思い込んでいるかもしれない。

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k,\quad \sum_{k=1}^{n}k(k+1),\quad \sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$ など

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ について

$k=\dfrac{1}{2}k\{(k+1)-(k-1)\}=\dfrac{1}{2}k(k+1)-\dfrac{1}{2}(k-1)k$ とできるので、

$$b_k=\frac{1}{2}(k-1)k,\qquad \sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ について

$k(k+1)=\dfrac{1}{3}k\{(k+2)-(k-1)\}=\dfrac{1}{3}k(k+1)(k+2)-\dfrac{1}{3}(k-1)k(k+1)$ とできるので、

$$b_k=\frac{1}{3}(k-1)k(k+1),\qquad \sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

一般に、次のことが成り立つ。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+l-m)=\frac{1}{m}n(n+1)\cdots(n+m)\qquad (m\in\mathbb{N})}$$

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2,\quad \sum_{k=1}^{n}k^3,\quad \sum_{k=1}^{n}k^4$ など

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ について、教科書では、$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

とし、整理して求めていく。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ についても同様である。

これらについては、以下に述べる差分を用いた計算の方が簡単にできる。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ について

$b_k=ak^3+bk^2+ck$ とおいて、 $k^2=b_{k+1}-b_k$ とならないか考える。
注意．定数項は 0 としたが、何でもかまわない。（差分で消える）

$$\begin{array}{ccccc}
 & a & 3a & 3a & a \\
 & & b & 2b & b \\
 & & & c & c \\
-) & a & b & c & \\ \hline
 & & 3a & 3a+2b & a+b+c
\end{array}$$

（上の 3 段が b_{k+1} の係数）

なので、$b_{k+1}-b_k=3ak^2+(3a+2b)k+a+b$

$3a=1,\quad 3a+2b=0,\quad a+b+c=0$ 　　よって、$a=\dfrac{1}{3},\quad b=-\dfrac{1}{2},\quad c=\dfrac{1}{6}$

したがって、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1=\left\{\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)\right\}-0\\
&=\frac{1}{6}(n+1)\{2(n^2+2n+1)-3(n+1)+1\}=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n)\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ について

$b_k=ak^4+bk^3+ck^2+dk$ とおいて、 $k^3=b_{k+1}-b_k$ とならないか考える。
注意．定数項は 0 としたが、何でもかまわない。（差分で消える）

$$\begin{array}{cccccc}
 & a & 4a & 6a & 4a & a \\
 & & b & 3b & 3b & b \\
 & & & c & 2c & c \\
 & & & & d & d \\
-) & a & b & c & d & \\ \hline
 & & 4a & 6a+3b & 4a+3b+2c & a+b+c+d
\end{array}$$

（上の 4 段が b_{k+1} の係数）

なので、$b_{k+1}-b_k=4ak^3+(6a+3b)k^2+(4a+3b+2c)k+a+b+c+d$

$$4a=1,\quad 6a+3b=0,\quad 4a+3b+2c=0,\quad a+b+c+d=0$$

よって、$a=\dfrac{1}{4},\quad b=-2a=-\dfrac{1}{2},\quad c=-2a-\dfrac{3}{2}b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

$$d=-a-b-c-d=0$$

したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3&=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1=\left\{\frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^2\right\}-0\\&=\frac{1}{4}(n+1)^2\left\{(n^2+2n+1)-2(n+1)+1\right\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$ について

前と同様なので、計算の部分だけ記す。

$$\begin{array}{ccccccc} & a & 5a & 10a & 10a & 5a & a\\ & & b & 4b & 6b & 4b & b\\ & & & c & 3c & 3c & c\\ & & & & d & 2d & d\\ & & & & & e & e\\ -) & a & b & c & d & e & \\ \hline & & 5a & * & * & * & * \end{array}$$

この計算で $b_{k+1}-b_k$ の係数が求められ、k^4 と比べて、 $5a=1$ 。そして、残りの $*$ のところは全て 0 　になる。

従って、 $a=\dfrac{1}{5},\qquad b=-\dfrac{5}{2}a=-\dfrac{1}{2},\qquad c=-\dfrac{10}{3}a-2b=-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{1}{3}$

$$d=-\frac{4}{2}a-2b-\frac{3}{2}c=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0,$$

$$e=-a-b-c-d=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0=\frac{-6+15-10}{30}=-\frac{1}{30}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^4&=b_{n+1}-b_1=\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}(n+1)\\&=\frac{1}{30}(n+1)\left\{6(n+1)^4-15(n+1)^3+10(n+1)^2-1\right\}\\&=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\end{aligned}$$

これより高い次数のべき乗和についても、同様に計算できる。

<備考>
$\sum_{k=1}^{n} k^m$ を n の多項式で表すときの係数について、今回と少し違った方法で求める方法を「べき乗和の公式について」というレポートを平成 26 年にまとめた。
(http://ja9nfo.web.fc2.com/math/bekijouwa.pdf　参照)

4　$\sum_{k=1}^{n} k \cdot r^{k-1}$,　$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot r^{k-1}$ など

(1) $S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots\cdots + n \cdot 2^{n-1}$ について
$S - 2S$ を考えるのが標準的な解法であるが、差分の方法も試してみる。

$b_k = (ak + b) \cdot 2^{k-1}$,　$b_{k+1} - b_k = k \cdot 2^{k-1}$ とおいてみる。
$\{a(k+1) + b\} \cdot 2 - (ak + b) = k$,　$ak + 2a + b = k$,　よって、$a = 1, b = -2$
$S = b_{n+1} - b_1 = \{(n+1) - 2\}2^n - (-1) = (n-1)2^n + 1$
※　$S - 2S$ の計算より簡単かもしれない。

一般の　$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot r + 3 \cdot r^2 + \cdots\cdots + n \cdot r^{n-1}$　$(r \neq 1)$　を考える。
$b_k = (ak + b) \cdot r^{k-1}, b_{k+1} - b_k = k \cdot r^{k-1}$ とすると、
$\{a(k+1) + b\} \cdot r - (ak + b) = k$,　$(r-1)ak + ra + (r-1)b = k$,　よって、
$a = \dfrac{1}{r-1}$,　$b = -\dfrac{r}{r-1}a = -\dfrac{r}{(r-1)^2}$

$$S = b_{n+1} - b_1 = \left\{\frac{1}{r-1}(n+1) - \frac{r}{(r-1)^2}\right\} r^n - \left(\frac{1}{r-1} - \frac{r}{(r-1)^2}\right)$$
$$= \frac{(r-1)(n+1) - r}{(r-1)^2} r^n - \frac{(r-1) - r}{(r-1)^2} = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(r-1)^2}$$

$r \neq 1$ のとき、
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot r + 3 \cdot r^2 + \cdots\cdots + n \cdot r^{n-1} = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(r-1)^2}$$

これについては、微分の計算方法も速い。

$x \neq 1$　のとき、$\sum_{k=0}^{n} x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$　が成り立つが、その両辺を微分して、
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - (x^{n+1} - 1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$
$x = r$　$(r \neq 1)$ と置けば求める式となる。 //

(2) $S = 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 7\cdot 2^2 + \cdots\cdots + (3n-2)\cdot 2^{n-1}$ について

標準的な解法は、
$S - 2S = 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 3\cdot 2^{n-1} - (3n-2)\cdot 2^n$
$-S = 1 + 3\cdot\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (3n-2)\cdot 2^n = 1 + 3\cdot 2^n - 6 - (3n-2)\cdot 2^n$
$\quad = -(3n-5)\cdot 2^n - 5, \qquad S = (3n-5)\cdot 2^n + 5$

2をかけて差し引くことを繰り返すと、途中が消えていくという工夫した計算では、
$(S-2S) - 2(S-2S) = 1 + 2\cdot 2 + 0 + \cdots\cdots + 0 - (3n+1)\cdot 2^n + 2(3n-2)\cdot 2^n$
$S = 5 + (3n-5)\cdot 2^n$

差分の方法では、
$b_k = (ak+b)\cdot 2^{k-1}, \quad b_{k+1} - b_k = (3k-2)\cdot 2^{k-1}$ と置くと、
$\{a(k+1)+b\}\cdot 2 - (ak+b) = 3k-2, \qquad ak + 2a + b = 3k - 2$
従って、 $a = 3, \quad 2a + b = -2, \quad b = -2a - 2 = -8$
$S = b_{n+1} - b_1 = \{3(n+1) - 8\}\cdot 2^n - (3-8)\cdot 1 = (3n-5)\cdot 2^n + 5$

標準的な解法及びそれを工夫した計算は、実際には、複数行に和を並べて書いて、計算を進める。また、標準的な計算の場合、第2項からの等比数列の和や、それを第1項、末項と合わせる際に計算間違いが起きやすい。それに比べ、差分の方法は計算が簡単である。ただ、高校生に使わせるのがよいかは別の問題である。

(3) $S = 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 2 + 3^2\cdot 2^2 + \cdots\cdots + n^2\cdot 2^{n-1}$ について
差分の方法で計算する。
$b_k = (ak^2 + bk + c)\cdot 2^{k-1}, \quad b_{k+1} - b_k = k^2\cdot 2^{k-1}$ とおく。
$\{a(k+1)^2 + b(k+1) + c\}\cdot 2 - (ak^2 + bk + c) = k^2, \quad ak^2 + (4a+b)k + 2a + 2b + c = k^2,$
よって、$a = 1,\ b = -4a = -4,\ c = -2a - 2b = -4 + 8 = 6$
$S = b_{n+1} - b_1 = \{(n+1)^2 - 4(n+1) + 6\}2^n - (1 - 4 + 6) = (n^2 - 2n + 3)\cdot 2^n - 3$

2をかけて差し引くことを繰り返す解法では、
$S - 2S = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots\cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1} - n^2\cdot 2^n$
$(S-2S) - 2(S-2S) = 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 2\cdot 2^{n-1} + (n^2 + 2n - 1)\cdot 2^n$
この左辺は $-S - 2(-S) = S$ である。再び両辺に2をかけたものを差し引くと
$S - 2S = 1 + 1\cdot 2 + 0 + \cdots\cdots + 0 - (n^2 + 2n - 3)\cdot 2^n, \qquad S = (n^2 - 2n + 3)\cdot 2^n - 3$

一般の $\quad S = 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot r + 3^2\cdot r^2 + \cdots\cdots + n^2\cdot r^{n-1} \quad (r \neq 1) \quad$ を考える。
$b_k = (ak^2 + bk + c)\cdot r^{k-1}, \quad b_{k+1} - b_k = k^2\cdot r^{k-1}$ とおく。
$\{a(k+1)^2 + b(k+1) + c\}\cdot r - (ak^2 + bk + c) = k^2$

$(r-1)ak^2+\{2ra+(r-1)b\}k+ra+rb+(r-1)c=k^2$

よって、$a=\dfrac{1}{r-1},\quad b=-\dfrac{2r}{r-1}a=-\dfrac{2r}{(r-1)^2}$

$$c=-\frac{1}{r-1}\cdot(ra+rb)=-\frac{1}{r-1}\cdot\left\{\frac{r}{r-1}-\frac{2r^2}{(r-1)^2}\right\}=-\frac{1}{r-1}\cdot\frac{r(r-1)-2r^2}{(r-1)^2}$$
$$=\frac{r(r+1)}{(r-1)^3}$$

$$S=b_{n+1}-b_1$$
$$=\frac{(r-1)^2(n+1)^2-2r(r-1)(n+1)+r(r+1)}{(r-1)^3}\cdot r^n-\frac{(r-1)^2-2r(r-1)+r(r+1)}{(r-1)^3}$$
$$=\frac{n^2r^{n+2}-(2n^2+2n-1)r^{n+1}+(n+1)^2r^n-r-1}{(r-1)^3}$$

$r\neq 1$ のとき、

$$1^2\cdot 1+2^2\cdot r+3^2\cdot r^2+\cdots\cdots+n^2\cdot r^{n-1}$$
$$=\frac{n^2r^{n+2}-(2n^2+2n-1)r^{n+1}+(n+1)^2r^n-r-1}{(r-1)^3}$$

これについて、微分の計算方法は

$x\neq 1$　のとき、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$　が成り立つが、その両辺を微分して、

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

両辺に x をかけて、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^k=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$

両辺を微分して、

$$\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}$$
$$=\{n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1\}\cdot(x-1)^{-2}$$
$$+\{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\}\cdot\{-2(x-1)^{-3}\}$$
$$=\frac{\{n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1\}\cdot(x-1)-2\{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\}}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$$

これにより、先ほどと同じ結果を得る。ただし、計算はそこそこ大変である。微分を用いた方法と比べても、差分を用いた計算の方が楽にできる。

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$ について

これは、2013 年度前期　東京大学・理科の第 3 問の確率の問題に出てくるものである。平成 25 年夏のレポートにまとめてあるが、ここにも記しておく。
（http://ja9nfo.web.fc2.com/math/SomeTopics-on-Sequences.pdf　参照)

i) 差分による計算

$b_k = \dfrac{ak^2+bk+c}{2^{2k-1}}$ とおき、 $b_k - b_{k+1} = \dfrac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$ とならないか考える。

$$b_k - b_{k+1} = \frac{4(ak^2+bk+c) - \{a(k+1)^2 + b(k+1) + c\}}{2^{2k+1}}$$

$$\begin{array}{rccc}
 & 4a & 4b & 4c \\
 & -a & -2a & -a \\
 & & -b & -b \\
+) & & & -c \\
\hline
 & 3a & -2a+3b & -a-b+3c
\end{array}$$

$3ak^2 + (-2a+3b)k + (-a-b+3c) = k^2 + k$
よって、　$3a = 1,\quad -2a+3b = 1,\quad -a-b+3c = 0$

$$a = \frac{1}{3},\quad b = \frac{2a+1}{3} = \frac{5}{9},\quad c = \frac{1}{3}(a+b) = \frac{8}{27}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{8}{27}\right)\cdot\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{3}(n+1)^2 + \frac{5}{9}(n+1) + \frac{8}{27}\right\}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}} \\
&= \frac{16}{32} - \frac{9n^2+33n+32}{27\cdot 2^{2n+1}}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{27} - 0 = \frac{16}{27}$$

ただし、S_n の第 2 項の極限値が 0 であることについては、n の多項式と 4^n の比較を用いて説明しなければならないだろう。

ii) 微分を用いた計算

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$ は $|x| < 1$ の時、絶対一様収束し、$\dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}$ となる。

$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$ とおくと、この条件の下項別微分ができるので、

$f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k, \quad f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^{k-1}$

一方、 $f(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x}$ であるから、

$f'(x) = (x-1)^{-2}, \quad f''(x) = -2(x-1)^{-3} = 2(1-x)^{-3}$

従って、 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^{k-1} = 2(1-x)^{-3}$

両辺に $x = \dfrac{1}{2^2}$ を代入して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\frac{1}{2^{2k-2}} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^3}\cdot 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{16}{27}$

もちろん、高校生の範囲では、「絶対一様収束し、項別微分が可能である」と言うことなどは学んでいない。

<終わりに>

ここまで、いくつかの数列について、差分（あるいは階差というべきか）を用いて数列の和を求める方法について考察してみた。きっかけは、高岡西高等学校の O 先生から、「11 月のマーク模試で、数列について普段とは違う方法による和の計算法が誘導してあった。」ということを聞いたことであった。その方法が、差分を用いる方法であった。

振り返ってみると、$a_k = b_{k+1} - b_k$ を満たす数列 $\{b_n\}$ を求めることは、和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めることとほぼ等しい。なぜなら、$S_n = b_{n+1} - b_1$ なので、$b_n = S_{n-1} + b_1 \quad (n \geqq 2)$ であるから、b_1 の差があるくらいのものである。部分分数展開や、$a_k = k(k+1)\cdots(k+m-1)$ の場合であれば、b_k は割と自然に求められる。しかし、その他の場合は、ある程度の目途を持って b_k を未定係数法で決定していくことになる。

差分の方法は、「和の式はこうなるはずだ。」と求めておいてから、「差分 $b_{k+1} - b_k$ が a_k に等しいから、やはりその式になる。」ということに他ならない。そんな方法であるが、結構実用的である。高校の先生方や入試問題を作成する大学の先生は、この方法について、どう思われるだろうか。