# $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$　について

平成 29 年 10 月
富山県立福岡高等学校
片山　喜美
(数学の資料は　http://ja9nfo.web.fc2.com/math/math.htm に掲載)

## 1　定積分　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx \quad (a>0)$

### 1.1　置換 $x=a\sin\theta$ による計算

2017 年の富山大学入試に出題された積分である。標準的な解法は、$x=a\sin\theta$ と置くものであろう。

$$dx=a\cos\theta d\theta,\quad \text{対応する積分範囲は}\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\ \text{より、}$$

$$\text{与式}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}{a\sin\theta}a\cos\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{a\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{a(1-\sin^2\theta)}{\sin\theta}d\theta=a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta-a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta$$

ここで、

- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{(1-\cos\theta)'}{1-\cos\theta}-\frac{(1+\cos\theta)'}{1+\cos\theta}d\theta\right\}$

  $\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[\ \log(1-\cos\theta)-\log(1+\cos\theta)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left\{\log\left(1-\frac{1}{2}\right)-\log\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}-\left\{\log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right.$

  $=-\log\sqrt{3}+\log(2+\sqrt{3})$

- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta=\Big[\ \cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

従って、与式 $\displaystyle=a\left(\log\frac{3+2\sqrt{3}}{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

### 1.2　置換 $\sqrt{a^2-x^2}=at$ による計算

$x=a\sin\theta$ と置く計算は、回り道をしているように感じたので、別の置換を試してみた。

$\sqrt{a^2-x^2}=at$ とすると、$a^2-x^2=a^2t^2,\quad x^2=a^2(1-t^2),\quad 2xdx=-2a^2tdt$

対応する範囲は、$\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{2}\geqq t\geqq\frac{1}{2}$

$$与式 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}(xdx) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{at}{a^2(1-t^2)}(-a^2tdt) = a\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{1-t^2}dt$$

$$= a\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt = a\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\right\}dt$$

$$= a\left[-t+\frac{1}{2}\log(1+t)-\log(1-t)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= a\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\log(2+\sqrt{3})-\log\sqrt{3}\right) = a\left(\log\frac{3+2\sqrt{3}}{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

この計算からわかるように、この積分では三角関数への置き換えが不要なのである。それは、分母に $x$ があるおかげである。

## 2　不定積分　$\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx \quad (a>0)$

前の節の計算をみると、不定積分が可能であることがわかる。

$\sqrt{a^2-x^2}=at$ とすると、$a^2-x^2=a^2t^2,\quad x^2=a^2(1-t^2),\quad 2xdx=-2a^2tdt$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}(xdx) = \int \frac{at}{a^2(1-t^2)}(-a^2tdt) = a\int \frac{-t^2}{1-t^2}dt = a\int\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

$$= a\int\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right\}dt = a\left(t+\frac{1}{2}\log\frac{1-t}{1+t}\right)+C = a\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\log\frac{1-\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{1+\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right)+C$$

$$= \sqrt{a^2-x^2}+a\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$$