$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ について

平成 29 年 10 月
富山県立福岡高等学校
片山　喜美
(数学の資料は　http://ja9nfo.web.fc2.com/math/math.htm)

1　置換 $t = x + \sqrt{a^2+x^2}$ による計算

この積分については、$t = x + \sqrt{a^2+x^2}$ と置けばうまくいくことがわかっている。

このとき　$t > 0$ であり、

$$dt = \left\{1 + \frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right\}dx = \frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{t}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \text{ より、}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}dx} = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$$

自分が高校生の時に使った問題集には、「$t = x + \sqrt{a^2+x^2}$ と置いて計算せよ」と天下り的に書いてあったが、どうしてこのような置換をするのか、理由は説明されていなかった。その後、教員となっても理由は見たことがなかった。

2　関数　$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$、$g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を用いた計算

$t = x + \sqrt{a^2+x^2}$ と置換する理由について、ふとしたきっかけから考えてみた。

(1) $f(x), g(x)$ の関係　その 1

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = g(x), \quad g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$$

(2) $f(x), g(x)$ の関係　その 2

$$g(x)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1 = f(x)^2 + 1 \text{ より}$$

$$g(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1}$$

これらを用いて、$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を以下のように計算する。

$t=f(x)$ と置くと、 $dt=f'(x)dx=g(x)dx=\sqrt{f(x)^2+1}dx=\sqrt{t^2+1}dx$

従って、$\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int dx=x+C$

ここで、$t=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ より、

$(e^x)^2-2te^x-1=0,\quad e^x=t\pm\sqrt{t^2+1}$

$e^x>0$ より，　$e^x=t+\sqrt{t^2+1},$　よって、$x=\log(t+\sqrt{t^2+1})$

これにより、$\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\log(t+\sqrt{t^2+1})+C$ を得る。

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ については、$x=at$ と置いて、上の積分に結びつければよい。

- 備考 1
  積分の最終結果がわかっていれば、
  $t=x+\sqrt{x^2+a^2}$ と置いたときに、$\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C=\log t+C=\displaystyle\int\frac{dt}{t}$
  ということから、$t=x+\sqrt{x^2+a^2}$ と変数変換するとうまくいくことが説明できる。

- 備考 2
  この計算を思いついたきっかけは、ある生徒が M 先生に
  「$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$ のとき、$\lim\limits_{x\to-\infty}y$ はどうなるか？」
  ということについて質問に来ていたことである。それを横で見ていて、計算を考えてみたのである。
  この極限は、このままでは求めにくい。
  $x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$ のとき、$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$
  ここで、この逆数を考えるのがうまい手であり、
  $e^{-x}=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{y-\sqrt{y^2+1}}{y^2-(y^2+1)}=-y+\sqrt{y^2+1}$
  従って、$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ となり、
  $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{0-\infty}{2}=-\infty$

　生徒は、「$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$ のとき」という状況の質問をしてきたが、それは与えられた問題の (3) あたりの設問であり、上記のように y について解いてみると、きっと、その問題文には、$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ があたえられているのだろう。それを x について解いて,$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$ としたのだろうと思う。

そして、この対数の式が表題の不定積分の解であるから、上記のような計算を考察することに結びついた。

3 $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{x^2+1}}$ **を置換　$x = \tan\theta$　により計算する**

$x = \tan\theta$ とする。ただし、 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし、$\cos\theta \geqq 0$ となるようにする。

このとき、x の正負は、$\sin\theta$ の正負と一致する。

$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ より、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta} - \frac{(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta} \right\} d\theta = \frac{1}{2}\{\log(1+\sin\theta) - \log(1-\sin\theta)\} + C$$

$\left(\text{途中で、}\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta \quad (\because \cos\theta \geqq 0) \text{ を用いた。}\right)$

ここで、$1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ より、$\sin^2\theta = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}} = \dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$\sin\theta$ と x の符号は同じであるから、 $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\frac{1}{2}\{\log(1+\sin\theta) - \log(1-\sin\theta)\} + C = \frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \log\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}} + C = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + C = \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{(x^2+1)-x^2} + C$$

$$= \log(\sqrt{x^2+1}+x) + C$$

$\sqrt{x^2+a^2}$ であれば、 $x = a\tan\theta$ と置換するのが定番である。

しかし、計算の途中でややこしくなって、教員でも頓挫する人が多い。

$\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{1-\sin^2\theta}$ の形から、$s = \sin\theta$ と置換して積分し、手間取る人もいることだろう。

上記の計算は $\cos\theta \geqq 0$ として絶対値の場合分けを回避するなど、効率の良いものとしている。