$1+2+3+\cdots+n+\cdots=-\dfrac{1}{12}$ の証明　その 2

平成 28 年 9 月
富山県立福岡高等学校
片山　喜美

どう見ても成り立たないこの等式の「証明」について、先のレポートに記載したが、それは、6 月に、ある学校に出張に行って、止めてあった自動車の番号が、インドの天才ラマヌジャン (1887 年〜1920 年) の逸話に出てくるタクシー数 1729 であったことがきっかけであった。

その後、数学セミナー 2016 年 9 月号の表紙にラマヌジャンが取り上げられて、ラマヌジャンに関する「奇跡がくれた数式」（英語のタイトルは「The man who knew infinity」）という映画が作られていることが書かれていた。日本では 10 月に公開されるとのことである。

映画の原作は「無限の天才」（原題は「The man who knew infinity」で映画の英語タイトルと同じ）という本であるが、20 年くらい前（？）に購入したものの読んでいない。相当長い本で、いつ読むのか見通しが立たない。定年後かもしれない。

今年前半に少し勉強していたことに、$x^2+y^2=n$ を満たす整数 x,y の個数の問題があるが、その母関数による証明には、ヤコビの三重積公式が用いられる。そして三重積公式は、ロジャース - ラマヌジャンの公式につながる。ということで、今年は、ラマヌジャンに縁があった。

さて、ここでは標題の等式の別の「証明」を書く。ただし、先のレポートとは違い、ζ 関数や Γ 関数を用いたもので、ある程度のレベルの数学の知識が必要である。概略は以

下のとおりである。

- $\zeta(s) = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n^s} + \cdots$ とおく。

  この無限級数は、$s > 1$ を満たす実数 s について収束する。さらに、複素数 $s = x+iy$ について、実部 $x > 1$ のとき収束し、s の正則関数となる。

- $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{B_k}{k!} s(s+1)(s+2)\cdots(s+k-2)$
  と表すことができる。
  ただし、$\{B_k\}$ はベルヌイ数で、 $B_0 = 1,\, B_1 = \dfrac{1}{2},\, B_2 = \dfrac{1}{6},\, B_3 = 0,\, \cdots$ である。
  この式で考えると、$s \neq 1$ で正則な関数であることがわかる。
  （ $s = 1$ では、 1 位の極となり、その留数は 1 である）

- $1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n^s} + \cdots$
  $= \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} B_2\, s + \dfrac{1}{3!} B_3\, s(s+1) + \dfrac{1}{4!} B_4\, s(s+1)(s+2) + \cdots$

  となるが、この両辺に $s = -1$ を代入すると

  $$1 + 2 + 3 + \ldots\cdots + n + \cdots = \frac{1}{-1-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(-1) + 0 + 0 + \cdots\cdots = -\frac{1}{12}$$

  となり、証明が終わる。

ここで、キーポイントになるのは、次の公式である。

（公式 1 ）　$\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{B_k}{k!} s(s+1)(s+2)\cdots(s+k-2)$

この公式を導くには、まず Γ 関数から始めることになる。

1　Γ 関数

1.1　Γ 関数の候補を求めて

Γ 関数は、自然数の階乗 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ を補間する関数で,

(性質)　$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

を満たすものである。このとき、$\Gamma(n) = (n-1)!$ を満たすことが帰納的に示される。

こうした関数をどうやったら作れるのか？

$N \in \mathbb{N}$ のとき、

$$\Gamma(s+N) = (s+N-1)\Gamma(s+N-1) = (s+N-1)(s+N-2)\Gamma(s+N-2) = \cdots$$
$$= (s+N-1)(s+N-2)\cdots(s+1)s\Gamma(s)$$

ここで、 $s \in \mathbb{N}$ のとき、
$\Gamma(s+N) = (N+s-1)(N+s-2)\cdots(N+1)N \times (N-1)!$ であるから、

$$\Gamma(s) = \frac{(N+s-1)(N+s-2)\cdots(N+1)N \times (N-1)!}{s(s+1)\cdots(s+N-1)}$$
$$= \frac{N^s(1+\frac{s-1}{N})(1+\frac{s-2}{N})\cdots(1+\frac{1}{N})\cdot 1 \cdot \times (N-1)!}{s(s+1)\cdots(s+N-1)}$$

s を固定して $N \to \infty$ としていくと、これは $\dfrac{N^s \times (N-1)!}{s(s+1)\cdots(s+N-1)}$ と近い。

それならば、

$\Gamma_N(s) = \dfrac{N^s \times (N-1)!}{s(s+1)\cdots(s+N-1)}$ として、$\Gamma(s) = \lim\limits_{N\to\infty} \Gamma_N(s)$ としてみてはどうか。

もちろん、分母が 0 となる $s = 0, -1, -2, \cdots$ は除かないといけない。それ以外なら、収束する限り、s を実数だけではなく、複素数まで広げて考えてもよいのではないか。

1.2 極限の存在

極限 $\Gamma(s) = \lim\limits_{N\to\infty} \Gamma_N(s)$ が存在するか考える。

- $\Gamma_N(s) = \Gamma_1(s) \times \dfrac{\Gamma_2(s)}{\Gamma_1(s)} \times \dfrac{\Gamma_3(s)}{\Gamma_2(s)} \times \cdots \times \dfrac{\Gamma_N(s)}{\Gamma_{N-1}(s)} = \Gamma_1(s) \times \displaystyle\prod_{n=1}^{N-1} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)}$

  従って、$\Gamma(s) = \lim\limits_{N\to\infty} \Gamma_N(s) = \Gamma_1(s) \times \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)}$ である。このため、無限乗積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)}$ の収束が言えればよい。

- 無限乗積の収束については、

  $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束するならば } \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ が収束する。}}$

  という補題がある。（ここでは証明を略する）

この方針で、極限の存在を示す。

$$\frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)} = \frac{(n+1)^s \cdot n!}{s(s+1)\cdots(s+n-1)(s+n)} \times \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n^s \cdot (n-1)!}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{n}{s+n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$
$$= \left(1+\frac{s}{n}+\cdots\right)\left(1-\frac{s}{n}+\cdots\right) = \left(1-\frac{s^2}{n^2}+\cdots\right) = 1+a_n$$

ここで、$a_n = O(\frac{1}{n^2})$ であり、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ であるから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束する。

よって、$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)}$ が収束する。

すなわち、極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \Gamma_N(s)$ が存在する。

1.3 $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ について

- $\displaystyle\Gamma(1) = \lim_{N\to\infty} \Gamma_N(1) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^1 \cdot (N-1)!}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot N} = \lim_{N\to\infty} 1 = 1$
- $\displaystyle\Gamma(s+1) = \lim_{N\to\infty} \Gamma_N(s+1) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{s+1} \times (N-1)!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N-1)(s+N)}$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{N^s \times (N-1)!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+N-1)} \cdot \frac{Ns}{s+N} \right\}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left\{ \Gamma_N(s) \cdot \frac{s}{\frac{s}{N}+1} \right\} = s\Gamma(s)$$

以上により、２つの性質は成り立つ。

1.4 $\Gamma(s)$ の無限乗積による表現

$$\Gamma_N(s) = \frac{N^s \times (N-1)!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+N-1)} = \frac{e^{s\log N}}{s(s+1)(\frac{s}{2}+1)\cdots(\frac{s}{N-1}+1)}$$
$$= \frac{1}{s} e^{-s(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}-\log N)} \frac{e^{s(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1})}}{(s+1)(\frac{s}{2}+1)\cdots(\frac{s}{N-1}+1)}$$
$$= \frac{1}{se^{s(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}-\log N)}} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}$$

オイラーの定数 $\displaystyle\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{N}-\log N\right)$ を用いて、

$$\boxed{\Gamma(s) = s^{-1}e^{-\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}}$$

あるいは、逆数をとって

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

この形により、 $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ は、

- $s = 0, -1, -2, \cdots - n, \cdots$ において零点を持ち、それ以外に零点はない。
- 全複素数平面で正則である。

1.5 積分による表現

まず、β 関数 $\beta(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ の満たす性質を考える。

補題 1 以下の等式が成り立つ

(1) $\beta(p,q) = \dfrac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$

(2) $\beta(p,q) = \dfrac{p-1}{q}\beta(p-1,q+1)$

証明）(1) 部分積分により

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \left[\frac{1}{p}t^p(1-t)^{q-1}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-2}dt$$
$$= \frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)//$$

（２） 同様に部分積分で示すことができる。//

補題 2 $n \in \mathbb{N}$ のとき、$\beta(p,n) = \dfrac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}$

証明）補題 1 (1) により、$\beta(p,n) = \dfrac{n-1}{p}\beta(p+1,n-1) = \dfrac{(n-1)}{p(p+1)}\beta(p+2,n-2)$

$$= \cdots = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{p(p+1)\cdots(p+n-2)}\beta(p+n-1,1)$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{p(p+1)\cdots(p+n-2)}\int_0^1 t^{p+n-2}dt = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{p(p+1)\cdots(p+n-2)}\left[\frac{1}{p+n-1}t^{p+n-1}\right]_0^1$$
$$= \frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}//$$

定理 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_o^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$

証明）補題 2 より、

$$\Gamma_N(s) = N^s \frac{(N-1)!}{s(s+1)\cdots(s+N-1)} = N^s \cdot \beta(s,N)$$
$$= N^s \cdot \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{N-1}dt = \int_0^1 (Nt)^{s-1}(1-t)^{N-1}(Ndt)$$
$$= \int_0^N x^{s-1}\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-1}dx \qquad \longrightarrow \qquad \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad (N\to\infty)$$

ただし、$\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-1} = \left\{\left(1-\frac{x}{N}\right)^{-\frac{N}{x}}\right\}^{-\frac{x}{N}(N-1)} = \left\{\left(1-\frac{x}{N}\right)^{-\frac{N}{x}}\right\}^{-x(1-\frac{1}{N})} \longrightarrow \quad e^{-x}$

また、積分区間が $\int_0^N \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty$ となる。

この2つの操作をいっぺんに行ってよいかについては、慎重に議論しなくてはならない。
ここでは、詳細は略する。(証明終)

この積分による表現が、ζ 関数を取り扱うときに役に立つ。

2　ζ 関数

定義　$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$　と定義する。

補題1　$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$

証明）$n < x < n+1$ のとき、$\frac{1}{n} > \frac{1}{x}$

従って、
$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx > \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx = [\log x]_n^{n+1} = \log(n+1) - \log n$$

となり、$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{N}\{\log(n+1)-\log n\} = \log(N+1)$　である。

よって、　$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{n} \geqq \lim_{N\to\infty}\log(N+1) = +\infty$ //

補題2　$s\in\mathbb{R},\quad s>1$ について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は収束する。

証明）$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} < 1 + \int_{n=1}^{N+1}\frac{1}{x^s}dx = 1 + \left[\frac{1}{-s+1}\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^{N+1} = 1 + \frac{1}{s-1}\left\{1 - \frac{1}{(N+1)^{s-1}}\right\}$
$$< 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

よって、$A_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$ は正の単調増加数列で、有界となるので、収束する。//

命題１　$\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$　$s\in\mathbb{C}$ は $Re(s)>1$ においてコンパクト一様収束し、 s の正則関数を与える。

証明）$Re(s)>1$ に含まれるコンパクト集合 K に対して、$^{\exists}\sigma_0>1$ s.t. $^{\forall}s\in K \quad Re(s)\geqq\sigma_0$

このとき、$\left|\dfrac{1}{n^s}\right|=\left|e^{-(\sigma+yi)\log n}\right|=e^{-\sigma\log n}=\dfrac{1}{n^{\sigma}}\leqq\dfrac{1}{n^{\sigma_0}}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}$ は収束するので命題は成り立つ。//

命題２　$\zeta(s)=\dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt$

証明）$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt$ を考える。

$x=nt$ とおいて、$dx=n\,dt$

$$\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt=\int_0^{\infty}e^{-x}\left(\frac{x}{n}\right)^{s-1}\frac{dx}{n}=\frac{1}{n^s}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=\frac{1}{n^s}\Gamma(s)$$

よって、$\dfrac{1}{n^s}=\dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{s-1}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}\right)t^{s-1}dt=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt$$

（ただし、和と積分の順序の入れ替えが可能なことについては、ここでは省略する）//

さて、命題２の積分で分母は

$$1-e^{-t}=1-\left\{1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\cdots\right\}=t-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3-\cdots=$$

従って、$t=0$ において 0 となる。そのため、t をかけて、$\dfrac{t}{1-e^{-t}}\cdot e^{-t}t^{s-2}$ とすると、

- $\dfrac{t}{1-e^{-t}}$ のところは、$\dfrac{-t}{e^{-t}-1}$ として、ベルヌイ数に結び付けられる。

  $\dfrac{t}{e^t-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k=1+B_1t+\frac{B_2}{2!}t^2+\frac{B_3}{3!}t^3+\cdots$　であったから、

  $\dfrac{-t}{e^{-t}-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}(-t)^k=1-B_1t+\frac{B_2}{2!}t^2-\frac{B_3}{3!}t^3+\cdots$

- 残りの $e^{-t}t^{s-2}$ のところは、

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{s-2}dt = \Gamma(s-1) \quad$$ と、Γ 関数に結び付ける。

以上により

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t}{1-e^{-t}} \cdot e^{-t}t^{s-2}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{B_k}{k!}(-t)^k\right\} \cdot e^{-t}t^{s-2}dt$$

ここで、ベルヌイ数の数値の求め方について考える。

補題３　$B_0 = 1, \quad B_1 = -\dfrac{1}{2}$　　$k \geqq 1$ のとき、$B_{2k+1} = 0$

証明）$f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ とおく。

$$B_0 = \lim_{t\to 0} f(t) = \left(\frac{1}{e^t}\right)_{t=0} = 1$$

$$f(t) - f(-t) = \frac{t}{e^t-1} - \frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{t}{e^t-1} - \frac{-te^t}{1-e^t} = \frac{t}{e^t-1} - \frac{te^t}{e^t-1} = \frac{-t(e^t-1)}{e^t-1} = -t$$

一方、$f(t) - f(-t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}(-t)^k = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k-1}}{(2k-1)!}t^{2k-1}$

従って、$2B_1 = -1$ かつ $k \geqq 1$ のとき、$B_{2k+1} = 0$ //

補題４　$n \geqq 1$ のとき、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = 0$

証明）ベルヌイ数の定義より

$$1 = \left(\frac{e^t-1}{t}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k\right)$$

右辺 $= \displaystyle\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}t^l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}\frac{B_k}{k!}t^{l+k} \quad = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)!}\frac{B_k}{k!}\right\}t^n$

従って、$n \geqq 1$ のときの t^n の係数について、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)!}\frac{B_k}{k!} = 0$　が成り立つ

この式の両辺に $(n+1)!$ を掛けると、

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!}B_k = 0$$　となり、与式が成り立つ//

◎補題３、４により、ベルヌイ数を順次計算していくことができる。

- $n=2$ として、 $\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2=1+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3B_2=0$

  よって、$B_2=\frac{1}{6}$
- 補題 3 より $B_3=0$
- $n=4$ として、 $\binom{5}{0}B_0+\binom{5}{1}B_1+\binom{5}{2}B_2+\binom{5}{4}B_4=1+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+10\cdot\frac{1}{6}+5B_4$

  $$=\frac{6-15+10}{6}+5B_4=0$$

  よって、$B_4=-\frac{1}{30}$

ζ 関数に戻る。

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty\left\{\frac{B_k}{k!}(-t)^k\right\}\cdot e^{-t}t^{s-2}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\left\{1+\frac{1}{2}t+\sum_{k=2}^\infty(-1)^k\frac{B_k}{k!}t^k\right\}e^{-t}t^{s-2}dt$$

$N\in\mathbb{N}$ とし、

$$I_1=\int_0^\infty\left\{1+\frac{1}{2}t+\sum_{k=2}^N(-1)^k\frac{B_k}{k!}t^k\right\}e^{-t}t^{s-2}dt,\qquad I_2=\int_0^\infty\left\{\sum_{k=N+1}^\infty(-1)^k\frac{B_k}{k!}t^k\right\}e^{-t}t^{s-2}dt$$

とおく。（最初の $N+1$ 項の展開と残りに分けて積分を考え、収束範囲を考察する）

I_1 の $t\to+0$ における広義積分で問題となるのは、t に関する一番次数の低い項 t^{s-2} であるから、$Re(s)-2>-1$ のとき、すなわち $Re(s)>1$ のとき積分は可能である。
このとき、$I_1=\displaystyle\int_0^\infty\left\{e^{-t}t^{s-2}+\frac{1}{2}e^{-t}t^{s-1}+\sum_{k=2}^N(-1)^k\frac{B_k}{k!}e^{-t}t^{k+s-2}\right\}dt$

$$=\Gamma(s-1)+\frac{1}{2}\Gamma(s)+\sum_{k=2}^N(-1)^k\frac{B_k}{k!}\Gamma(k+s-1)$$

ここで、$\dfrac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)}=\dfrac{\Gamma(s-1)}{(s-1)\Gamma(s-1)}=\dfrac{1}{s-1}$

$$\frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(s)}=\frac{(s+k-2)(s+k-3)\cdots(s+1)s\Gamma(s)}{\Gamma(s)}$$

$$=(s+k-2)(s+k-3)\cdots(s+1)s$$

従って、$\dfrac{1}{\Gamma(s)}I_1(s)=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=2}^N(-1)^k\frac{B_k}{k!}s(s+1)\cdots(s+k-2)$

この式の右辺は、全複素数平面で有理型関数を与え、 $s=1$ で留数 1 の 1 位の極を持つ以外は正則である。

I_2 は $Re((N+1)+s-2)>-1$ のとき、すなわち、$Re(s)>-N$ のときに積分可能である。$\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ は全複素数平面で正則であったから、$\dfrac{1}{\Gamma(s)}I_2$ は $Re(s)>-N$ において正則である。

以上により、

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\frac{B_k}{k!}s(s+1)\cdots(s+k-2)+\frac{1}{\Gamma(s)}I_2$$

が $Re(s)>-N$ において成り立つ。

N は任意に大きくとることができるので、

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{B_k}{k!}s(s+1)\cdots(s+k-2)$$

が全複素数平面で成り立つ。
さらに、k が 3 以上の奇数のとき、$B_k=0$ であるから、

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}s(s+1)\cdots(s+k-2)\\&=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}B_2s+\frac{1}{3!}B_3s(s+1)+\frac{1}{4!}B_4s(s+1)(s+2)+\cdots\end{aligned}$$

いよいよ表題の等式を証明する。
$\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ であったから、上に示した式により

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}B_2s+\frac{1}{3!}B_3s(s+1)+\frac{1}{4!}B_4s(s+1)(s+2)+\cdots$$

両辺に -1 を代入して、

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots=\frac{1}{-1-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot(-1)+0+0+\cdots=-\frac{1}{12}\ //$$

　ついでに、もう少し進んで $\zeta(-n),\zeta(2n)\quad(n\in\mathbb{N})$ の値を求めるところまで行ってみる。

◎ $\zeta(-n)$ について

$\zeta(s)=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}s(s+1)\cdots(s+k-2)$ より、

$$\begin{aligned}\zeta(-n)&=\frac{1}{-n-1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}(-n)(-n+1)\cdots(-n+k-2)\\&=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{B_k}{k!}(-1)^{k-1}n(n-1)\cdots(n-k+2)\\&=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{n!}{k!(n-k+1)!}B_k\end{aligned}$$

$(k$ が奇数のとき $B_k = 0$ であるから $(-1)^{k-1}B_k = -B_k)$

$$= -\frac{1}{n+1}\left\{1 + (n+1)\left(-\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}B_k\right\}$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_k = -\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k + B_{n+1}\right\}$$

補題４より、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = 0$　　従って、　$\displaystyle\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$

偶数、奇数に分けて

$$\boxed{\zeta(-2k) = -\frac{B_{2k+1}}{k+1} = 0, \qquad \zeta(-2k+1) = -\frac{B_{2k}}{2k}}$$

◎ $\zeta(2n)$ について

これには、$\sin(\pi s)$ の無限乗積による表現を用いる。

$\displaystyle\sin(\pi s) = \pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$ となることが知られている。（ここでは証明を略する）

$$\log\sin(\pi s) = \log\pi s + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = \log\pi s + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{s^2}{n^2}\right)^k\right\}$$

$$= \log\pi s - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)s^{2k} = \log\pi s - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k}s^{2k}$$

微分して、$\displaystyle\frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi s)} \times \pi = \frac{\pi}{\pi s} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)s^{2k-1}$

両辺に s をかけて、　$\displaystyle\frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi s)} \times \pi s = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)s^{2k}$

左辺 $\displaystyle= \frac{e^{i\pi s} + e^{-i\pi s}}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} \times i\pi s = \frac{e^{2i\pi s} + 1}{e^{2i\pi s} - 1} \times i\pi s = \left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi s} - 1}\right) \times i\pi s$

$$= i\pi s + \frac{2i\pi s}{e^{2i\pi s} - 1} = i\pi s + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}(2i\pi s)^k = i\pi s + 1 - \frac{1}{2}(2i\pi s) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2i\pi s)^{2k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}2^{2k}(-1)^k\pi^{2k}s^{2k}$$

両辺の s^{2k} の係数を比べて

$$\boxed{\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\,\pi^{2k}}$$

$B_2 = \dfrac{1}{6},\ B_4 = -\dfrac{1}{30}$ であったから、

- $\zeta(2) = \dfrac{2}{2} \cdot \dfrac{1}{6}\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$
- $\zeta(4) = -\dfrac{2^3}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \left(-\dfrac{1}{30}\right)\pi^4 = \dfrac{\pi^4}{90}$

なお、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$ 　によりベルヌイ数を順に求めて、 $\zeta(2n)$ が計算できる。

2.1　その他の $\zeta(2n)$ の計算方法

$\zeta(2n) = a_n \pi^{2n}$ と表され、その係数 a_n は次の漸化式を満たす。

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!} a_k \quad \text{（片山　1984 年）}}$$

- $n = 2$ として、
  $a_2 = (-1)^1 \cdot \dfrac{2}{5!} - \dfrac{(-1)^{2-1}}{(4-2+1)!} \cdot \dfrac{1}{6} = -\dfrac{2}{5!} + \dfrac{1}{3!} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{-12+20}{6!} = \dfrac{1}{90}$

  よって、 $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$
- $n = 3$ として、
  $a_3 = (-1)^2 \cdot \dfrac{3}{7!} - \dfrac{(-1)^{3-1}}{5!} \cdot \dfrac{1}{6} - \dfrac{(-1)^{3-2}}{3!} \cdot \dfrac{1}{90} = \dfrac{9-21+28}{3 \cdot 7!} = \dfrac{1}{945}$

  よって、 $\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}$

  以下、順次計算できる。

今回、 $1+2+3+\cdots+n+\cdots = -\dfrac{1}{12}$ をめぐって、Γ 関数や ζ 関数について復習し、理解を深めるよい機会となった。タクシー数を自動車登録番号にしていた先生に感謝する。

参考文献

「数論入門」　-ゼータ関数と 2 次体-
D.B. ザギヤー　著、　片山孝次　訳　　岩波書店