$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}=3$ に関連して

平成 28 年 10 月 1 日
富山県立福岡高等学校
片山　喜美

平成 28 年 9 月 27 日 (火) に開催された富山県高等学校教育研究大会数学部会におけるサイエンスナビゲータ桜井　進氏の講演はラマヌジャンに関するものであった。私は、書道部会長を仰せつかっていたため、数学部会には参加できず、大変残念であった。（その代わり、書道部会では、書家　石川九楊先生のお話を聞くことができて、貴重な体験になったことはうれしいことであった。）

さて、タイトルの等式は、桜井氏の講演資料にもあったものであるが、桜井氏の講演では等式の成り立つ理由については話がなかったようである。いかにも不思議なこの等式が成り立つ理由については、以前に見ていたのではないかという気がするが、ちょっと考えてみてわからず、関連の Youtube を見てみたところ、以下のように考えるのであった。

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\cdot 7}}}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots}}}}}=\cdots\cdots$$

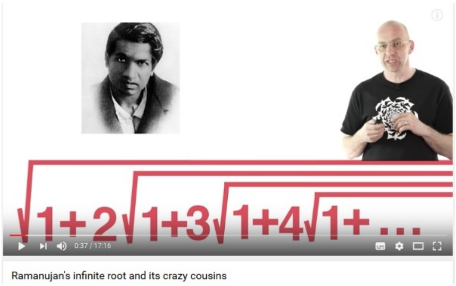

図 1: Youtube より

なぜ、こんなにうまくいくのか？　Youtube ではそのあたりの解説が無い。
ちょっと自分で考えてみると、
$(n+1)^2=1+n(n+2)$ より、
$n+1=\sqrt{1+n(n+2)}=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}}$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}}=\cdots$$

となることを使うのだと思われる。

この式に、$n=2$ を代入することで求める等式となる。$4,5,6,\cdots$ を同様の多重平方根で表すことについては、 $n=3,4,5,\cdots$ を代入すればよいのであろう。

無限に続く平方根による数の表現については、 $(n+2)^2=4+n(n+4)$ や $(n+3)^2=9+n(n+6),\quad\cdots$ などの式変形「も利用できるだろう。

問題１　次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{4+4\sqrt{4+6\sqrt{4+8\sqrt{4+\cdots}}}}}$

(2) $\sqrt{9+2\sqrt{9+5\sqrt{9+8\sqrt{9+11\sqrt{9+\cdots}}}}}$

(3) $\sqrt{4+3\sqrt{4+5\sqrt{4+7\sqrt{4+9\sqrt{4+\cdots}}}}}$

問題２　$a \geqq 0$ のとき、次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2+(a+2)\sqrt{a^2+(2a+2)\sqrt{a^2+(3a+2)\sqrt{a^2+\cdots}}}}}=a+2$

(2) $\sqrt{4a^2+2a\sqrt{4a^2+4a\sqrt{4a^2+6a\sqrt{4a^2+8a\sqrt{4a^2+\cdots}}}}}=4a$

(3) $\sqrt{a^2+(a+1)\sqrt{a^2+(2a+1)\sqrt{a^2+(3a+1)\sqrt{a^2+(4a+1)\sqrt{a^2+\cdots}}}}}=2a+1$

問題３　7 を 何通りかの $\sqrt{\quad}$ の無限入れ子の形で表せ。

課題　さて、ここまでの式変形は本当に正しいのだろうか？例えば、

$$4=\sqrt{16}=\sqrt{1+2\cdot\frac{15}{2}}=\sqrt{1+2\sqrt{\frac{225}{4}}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot\frac{221}{12}}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\frac{48841}{144}}}}=\cdots\cdots$$

従って、 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}=4$ だと言えるのか?

これは 3 になるはずだったのに $\cdots$ 。

無限に続くルートについては、その収束条件を考えなければならないのだろうが、それはどんな条件か？