$1+2+3+\cdots+n+\cdots=-\dfrac{1}{12}$ の証明について

平成 28 年 7 月
富山県立福岡高等学校
片山　喜美

　どう見てもこの等式は成り立たない。左辺は、正の無限大に発散する。なのに、負の有限値に等しいなど、ありえないことである。しかしながら、以下の様に、この等式が証明される。

補題　$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^2}\quad (x\neq 1)$

証明）$f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$ とおく。

$$
\begin{array}{rrcllllllll}
 & f(x) & = & 1 & +2x & +3x^2 & +\cdots & \cdots\cdots & +nx^{n-1} & +(n+1)x^n & +\cdots \\
-\ ) & xf(x) & = & & x & +2x^2 & +3x^3 & +\cdots\cdots & & +nx^n & +\cdots \\
\hline
 & (1-x)f(x) & = & 1 & +x & +x^2 & +\cdots & \cdots\cdots & +x^{n-1} & +x^n & +\cdots
\end{array}
$$

この式に、もう一度 x を掛けて差し引く

$$
\begin{array}{rrcllllllll}
 & (1-x)f(x) & = & 1 & +x & +x^2 & + & \cdots\ \cdots\cdots & +x^{n-1} & +x^n & \cdots \\
-\ ) & x(1-x)f(x) & = & & x & +x^2 & +x^3 & +\cdots\cdots\cdots & & +x^n\ + & \cdots \\
\hline
 & (1-2x+x^2)f(x) & = & 1 & & & & & & &
\end{array}
$$

これにより、$f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$　（証明終）

等式　$1+2+3+\cdots+n+\cdots=-\dfrac{1}{12}$　の証明

$S=1+2+3+4+5+\cdots+n+\cdots$ とおく。そして、S から $4S$ を以下の様に差し引く。

$$
\begin{array}{rrcccccccccccccc}
 & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & \cdots \\
-\ ) & 4S & = & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & + & \cdots \\
\hline
 & -3S & = & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + & \cdots
\end{array}
$$

　従って、$-3S=f(-1)$　（上式で、最後の右辺は $f(x)$ に $x=-1$ を代入したものとなっている）補題により、$f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ であるから、$f(-1)=\dfrac{1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{4}$

よって、$S=-\dfrac{1}{3}f(-1)=-\dfrac{1}{12}$　（証明終）

さて、この証明はあっているのだろうか？

余談　ラマヌジャンとタクシー数

６月のことだったと思うが、ある学校に出張に行ったあと、玄関を出たところに止めてあった自動車の番号が、インドの天才ラマヌジャン (1887 年〜1920 年) の逸話に出てくるタクシー数 1729 であった。偶然その番号になったのではなく、「富山 53*」なので、自分で希望された番号である。持ち主を聞いたところ、数学の先生であった。ちょっとうれしい気分であった。

その後、Youtube でラマヌジャンを検索してみると、いくつかラマヌジャンの数学に関わる話題を扱ったものが出てきた。$1729 = 9^3 + 10^3 = 12^3 + 1^3$ は、2 つの立法数の和で 2 通りに表される数のうち最小のものである。ラマヌジャンが何でそんな数を求めていたのか、これまで知らなかった。実は、ラマヌジャンがフェルマーの大定理に関わって調べていたものだということだそうで、今回初めて知った。$9^3 + 10^3 \fallingdotseq 12^3$ であることから、 $x^3 + y^3 = z^3$ の自然数解に近いということである。$x^3 + y^3 = z^3 \pm 1$ の解をいくつか見つけているとのことである。

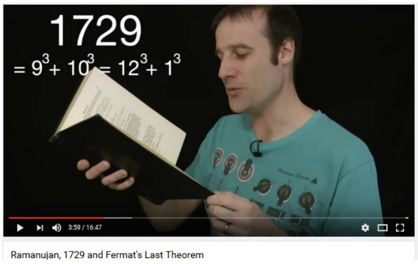

図 1: タクシー数

さて、等式　$1+2+3+\cdots+n+\cdots = -\dfrac{1}{12}$ は、インドの天才ラマヌジャンが、イギリスの大数学者ハーディに送った手紙の中に書いてあったものである。上に書いた事情で、先ごろ Youtube のラマヌジャン関連のものを見ているうちに、この等式に関わるものを目にした。それで、このプリントを書いてみたのであった。

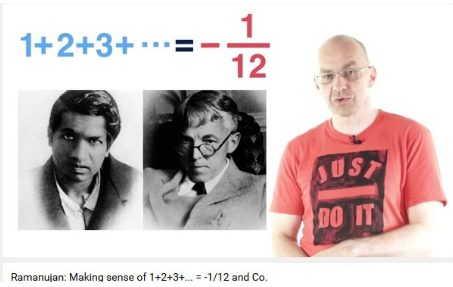

図 2: 1+2+3+...=-12

オイラー（1707 年〜1783 年）もこの等式について言及している。

$\zeta(s) = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots + \dfrac{1}{n^s} + \cdots$ とすると、これは $s \in \mathbb{C}, Re(s) > 1$ でコンパクト一様収束し、正則関数を与える。 $s = 1$ で特異点を持つが、それを除く全複素数平面に解析接続され、 $\zeta(-1) = -\dfrac{1}{12}$ が成り立つ。これが標題の等式にあたる。

Youtube には、英語ではあるが数学関連の動画が結構あるようだ。日本語のものがもっとあると、日本の若い人にも刺激になってよいのだろう。