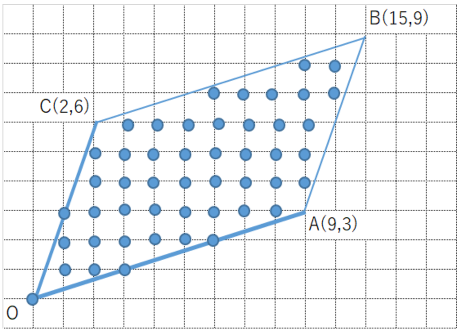
4 頂点が格子点である平行四辺形に含まれる格子点の個数について

2024 年 3 月
片山　喜美

定理　4 つの格子点　$O(0,\,0),\ A(a,\,b),\ B(a+c,\,b+d),\ C(c,\,d)$　$(a,\,b,\,c,\,d \in \mathbb{Z},\quad ad-bc \neq 0)$ を頂点とする平行四辺形について、その内部の格子点、および辺 $OA,\,OC$ 上の格子点で点 $A,\,C$ 以外のものを合わせた個数は、 $|ad-bc|$ 、すなわち平行四辺形 $OABC$ の面積に等しい。

例． $A(9,\,3),\ B(15,\,9),\ C(2,\,6)$ の場合

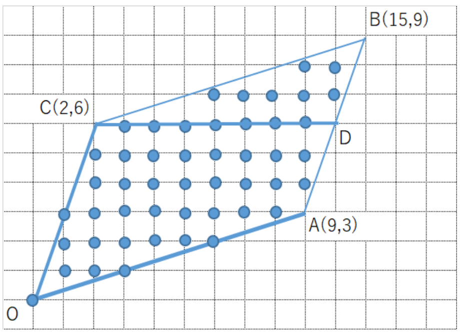
右図のようになり、格子点の個数は 48 である。これは平行四辺形の面積 $|9\times6-3\times2| = 48$ に等しい。



1　等積変形による証明

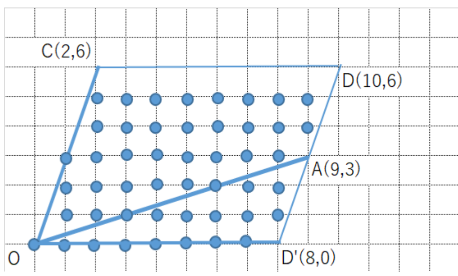
平行四辺形の形状により、等積変形の仕方が異なるが、基本的なところは同じである。例にあげた平行四辺形で説明する。

点 C を通り y 軸に垂直な直線と辺 AB の交点を D として、 $\triangle CDB$ を点 C が点 O に、点 B が点 A に重なるように移動する。
このとき、点 D がたどり着いた点を D' とする。なお、辺 CD 上にある格子点は移動するものとする。



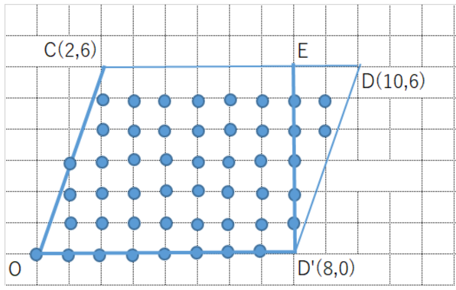
新たな平行四辺形 $OD'DC$ は

- 格子点の数は、もとの平行四辺形のときと変わらない。
- 2 辺 $OD',\,CD$ は、 y 軸と垂直である。



点 D' を通り x 軸に垂直な直線と辺 CD の交点を E として、 $\triangle D'DE$ を点 D' が点 O に、点 D が点 C に重なるように移動する。

このとき、点 E がたどり着いた点を E' とする。なお、辺 $D'E$ 上にある格子点は移動するものとする。

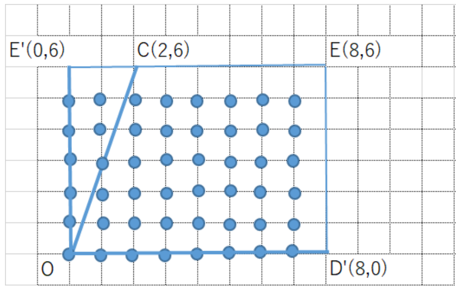


新たな平行四辺形 $OD'EE'$ は

- 辺が x 軸、 y 軸に垂直な長方形である。
- 格子点の数は、もとの平行四辺形のときと変わらない。

  その個数は、平行四辺形 $OD'EE'$ の面積に等しい。

  $(\because$ 横の個数が OD' の長さに等しく、縦の個数が OE' の長さに等しい)



上記の変形で、平行四辺形の面積および条件を満たす格子点の個数は変化しない。よって、定理が証明された。//

2 行列による証明

点 P が平行四辺形 $OABC$ の内部の点、および辺 OA, OC 上の点で点 A, C 以外のものとなのは、

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (0 \leqq s < 1,\ 0 \leqq t < 1)$$

と表されるときである。従って、

$$(x,\ y) = s(a,\ b) + t(c,\ d) = (sa + tc,\ sb + td)$$

行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

このとき、

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \mathit{\Delta} = ad - bc \quad (\neq 0)$$

とおく。

最大公約数 $gcd(a,\ b) = g$ とすると、$a = ga'$, $b = gb'$ を満たす整数 a', b' があり、$gcd(a',\ b') = 1$ である。

また、$ma + nb = g$ を満たす整数 m, n が存在する。(m, n のとり方は一意的ではない。)

ここで $L = \begin{pmatrix} m & n \\ -b' & a' \end{pmatrix}$ とおくと、

$$LM = \begin{pmatrix} m & n \\ -b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma+nb & mc+nd \\ -ab'+a'b & a'd-b'c \end{pmatrix}$$

成分について、

- $ma + nb = g$
- $-ab' + ab' = -(ga')b' + a'(gb') = 0$
- $a'd - b'c = \dfrac{a}{g}d - \dfrac{b}{g}c = \dfrac{ad-bc}{g} = \dfrac{\Delta}{g}$

$mc + nd = e, \quad \dfrac{\Delta}{g} = \Delta_1$ とおくと、$LM = \begin{pmatrix} g & e \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix}$

この行列 L を① 式の両辺左からかけて、

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = LM \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & e \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{よって、} \quad x' = gs + et, \quad y' = \Delta_1 t \quad \cdots\cdots \quad ②$$

ここで、 $det(L) = ma' + nb' = \dfrac{ma+nb}{g} = 1$ であるから

$L^{-1} = \begin{pmatrix} a' & -n \\ b' & m \end{pmatrix}$ の成分はすべて整数である。

このことより、

(x, y) が格子点 $\iff$ (x', y') が格子点

が成り立つ。

② 式 において、 $y' = \Delta_1 t \quad (0 \leqq t < 1)$ が整数となるとなる t の値は、

$t = \dfrac{k}{\Delta_1} \quad (k = 0, 1, 2, \quad \cdots \quad |\Delta_1| - 1)$ の $|\Delta_1|$ 個である。

それぞれの $t = \dfrac{k}{\Delta_1}$ について、 $x' = gs + \dfrac{ek}{\Delta_1} \quad (0 \leqq s < 1)$ の値がとりうる範囲は、

$\dfrac{ek}{\Delta_1} \leqq x' < \dfrac{ek}{\Delta_1} + g$ という幅が g の区間である。よって、その範囲の整数 x' の個数はちょうど g である。

よって、格子点 (x', y') の個数は $|\Delta_1| \times g = |\Delta|$ である。格子点 (x, y) の個数も同じであるから、定理が示された。//

$A(9, 3), B(15, 9), C(2, 6)$ の場合、$M = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$gcd(9, 3) = 3, \quad 0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 3$ とし,

$9=3\cdot 3,\ 3=3\cdot 1$ であるから、$L=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ とする。

$$LM=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 16\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s+6t\\ 16t\end{pmatrix}$$

$y'=16t \quad (0\leqq t<1)$ が整数となるのは $t=\dfrac{k}{16} \quad (k=0,\ 1,\quad \cdots \quad ,15)$ のときである。

このとき、 $\dfrac{3k}{8}\leqq x'=3s+\dfrac{3k}{8}<3+\dfrac{3k}{8}$ を満たす整数 x' は、どの k についても 3 個ずつである。従って、 格子点 $(x',\ y')$ の個数は $3\times 16=48$ である。

※ 最初に行列による証明を作ってみた。その後、もしかしたら、中学校でやるような等積変形で示せるのではないかと考えてみたのであった。