# 楕円の準円について

2023年3月
片山　喜美

2年理系の学年末考査で「楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に点 $(2,\,-1)$ から引いた2本の接線は直交することを示せ」という問題を出した。これは、次の定理を踏まえたものである。

**定理**

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ へ点Pから直交する2本の接線が引けるとき、点Pは円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ の上にある。

逆に、円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ の上にある任意の点Pから楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ へ直交する2本の接線が引ける。

（円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ を楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の準円と呼ぶ。）

楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の準円は $x^2+y^2=5$ であり、点 $(2,\,-1)$ は準円の上にあるので、この点から引いた2本の接線は直交するのである。

定理の証明）　$\mathrm{P}(p,\,q)$ とし、点Pを通り、傾きが $m$ の直線を $y=m(x-p)+q$ とおく。楕円の方程式に代入して、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\{mx+(-mp+q)\}^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2\{m^2x^2+2m(-mp+q)x+(-mp+q)^2\}-a^2b^2=0$$

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(-mp+q)x+a^2(-mp+q)^2-a^2b^2=0$$

$x^2$ の係数は正であることから、これは $x$ の2次方程式である。この方程式の判別式を $D$ とすると、直線が楕円に接するのは、 $D=0$ のときである。

$$\frac{D}{4}=a^4m^2(-mp+q)^2-(a^2m^2+b^2)(\{a^2(-mp+q)^2-a^2b^2\}=0$$

$a^2b^2>0$ より、 $(a^2-p^2)m^2+2pqm+(b^2-q^2)=0 \qquad \cdots \qquad ①$

- $p=a$ のとき
  $P(a,\,q)$ から楕円に引いた接線の1つは直線 $x=a$ である。よって、直交する楕円の接線は、2直線 $y=\pm b$ である。従って、 $P(a,\,\pm b)$ である。このとき、点 $P$ は、円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ の上にある。

- $p=-a$ のとき
  $p=a$ のときと同様に考えて、 $P(-a,\,\pm b)$ である。

  このとき、点 $P$ は、円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ の上にある。

- $p \neq \pm a$ のとき

　① は $m$ の 2 次方程式である。それが 2 つの異なる実数解 $m = m_1,\, m_2$ を持つのは、① の判別式が正となるときであるから、

$$p^2q^2 - (a^2 - p^2)(b^2 - q^2) > 0 \qquad b^2p^2 + a^2q^2 > a^2b^2 \qquad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} > 1$$

従って、点 $P$ は楕円の外の点の時である。

このとき、解と係数の関係より、 $m_1m_2 = \dfrac{b^2 - q^2}{a^2 - p^2}$

2 本の接線の傾きが $m_1,\, m_2$ であり、これらの接線が垂直となるのは、 $m_1m_2 = -1$ のときであるから、

$$\frac{b^2 - q^2}{a^2 - p^2} = -1 \qquad b^2 - q^2 = -a^2 + p^2 \qquad p^2 + q^2 = a^2 + b^2$$

よって。点 $P$ は円 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ の上にある。

　逆に、この円の上の $p \neq \pm a$ である任意の点 $P(p,\, q)$ を通る直線 $y = m(x - p) + q$ が楕円に接する条件を考えると、この円は楕円の外側にあるから異なる 2 つの接線が引け、しかも 2 本の接線の傾きが直交条件を満たすことが、上記の考察によりわかる。以上により、楕円の準線に関する定理が証明された。

双曲線、放物線についても、「直交する 2 本の接線を引くことができる点 $P$ の軌跡」を考えることができる。以下の課題について考えてみるとよい。

課題 1　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ へ直交する 2 本の接線を引くことができる点 $P$ の軌跡を求めよ。
（$a^2 > b^2$ のとき、円 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ から漸近線上の点を除いたものである。$a^2 \leqq b^2$ のとき、直交する 2 本の接線を引ける点は存在しない。）

課題 2　放物線 $y^2 = 4px$ へ直交する 2 本の接線を引くことができる点 $P$ の軌跡は、放物線の準線 $x = -p$ であることを示せ。

※直線は、半径が無限大の円だと考えて、放物線については、「半径が無限大の準円を持つ」という解釈もできるであろう。