数列のある問題に対する２つの解法について

～ 第二種チェビシェフ多項式を用いた解法と１次分数変換による解法 ～

2023 年 7 月

片山　喜美

京進　第 14 回数学解法コンテストに、以下のような出題があった。

問題 B

ℓ を複素数の定数とする。

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{d}=d+\frac{1}{e}=e+\frac{1}{a}=\ell$$

を満たす複素数 a, b, c, d, e の組で、

$$a=b=c=d=e$$

ではないものが存在するために ℓ の満たすべき必要十分条件を求めよ。

この問題に対して、高校 3 年生の松野伊織君は、問題を次のように一般化して考えた。

問題 B（N）

ℓ を複素数の定数とする。

$$z_0+\frac{1}{z_1}=z_1+\frac{1}{z_2}= \quad \cdots \quad =z_{N-1}+\frac{1}{z_0}=\ell$$

を満たす複素数 $z_0,\ z_1,\ z_2,\quad \cdots \quad,\ z_{N-1}$ の組で、

$$z_0=z_1=z_2= \quad \cdots \quad =z_{N-1}$$

ではないものが存在するために ℓ の満たすべき必要十分条件を求めよ。

そして、その必要十分条件が

$$\ell=2\cos\frac{k}{N}\pi \quad (k=1,\ 2,\quad \cdots \quad,\ N-1)$$

であることを導いた。

もとの問題 B は、問題 B(N) で $N=5$ の場合であるから、$\ell=2\cos\dfrac{k}{5}\pi \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

すなわち、$\ell=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ が答えとなる。

※　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき、 $\cos 3\theta=-\cos 2\theta$ が成り立つことから $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値が求められる。
　　あとは、倍角及び 3 倍角の公式使う。

1　第二種チェビシェフ多項式を用いた解法

松野伊織君の解法は、条件を満たすための条件が、第二種チェビシェフ多項式 $\{U_n(x)\}$ を用いて

$$\left(a^2 - \ell a + 1\right) U_{N-1}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \cdots Ⓐ$$

であることだと主張するものである。以下に、その解法を整理して述べる。[1]

数列 $\{z_n\}$ が $z_0 = a,\ z_n + \dfrac{1}{z_{n+1}} = \ell$ によって定まるとする。

$$z_1 = \frac{1}{\ell - z_0} = \frac{1}{\ell - a}, \quad z_2 = \frac{1}{\ell - z_1} = \frac{1}{\ell - \dfrac{1}{\ell - a}} = \frac{-a + \ell}{-\ell a + \ell^2 - 1}, \quad \cdots$$

この計算を見ると、$z_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ 　($P_n,\, Q_n$ は a の 1 次式)　と表されると推測できる。

$z_{n+1} = \dfrac{1}{\ell - z_n}$ より、$\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \dfrac{1}{\ell - \dfrac{P_n}{Q_n}} = \dfrac{Q_n}{-P_n + \ell Q_n}$

従って、$\{P_n\}, \{Q_n\}$ は、

$$P_0 = a,\, Q_0 = 1, \quad P_{n+1} = Q_n,\ Q_{n+1} = -P_n + \ell Q_n$$

で定められる。

$$z_0 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \frac{1}{z_2} = \quad \cdots \quad = z_{N-1} + \frac{1}{z_0} = \ell$$

を満たすとき、$z_N = z_0$ より、$\dfrac{P_N}{Q_N} = a$。先の等式より、$\dfrac{Q_{N-1}}{Q_N} = a$。従って、

$$Q_{N-1} - aQ_N = 0$$

を満たす。

- $N = 1$ のとき　　$Q_0 = 1, \quad Q_1 = -P_0 + \ell Q_0 = -a + \ell$ より、

$$Q_0 - aQ_1 = 1 - a(-a + \ell) = 0 \quad a^2 - \ell a + 1 = 0 \quad \ell = a + \frac{1}{a}$$

　このとき、$z_1 = \dfrac{1}{\ell - a} = \dfrac{1}{\left(a + \dfrac{1}{a}\right) - a} = a = z_0$ となる。

[1] 松野君から解答の概略を知らせてもらったものを参考に、式 Ⓐ を導く計算を少し簡明にしたつもりである。

- $N=2$ のとき　　$Q_1 - aQ_2 = 0, \quad (-a+\ell) - a(-P_0 + \ell Q_1) = 0$

  $(-a+\ell) - a\{-1+\ell(-a+\ell)\} = 0, \qquad \ell(a^2 - a\ell + 1) = 0$

  $a^2 - a\ell + 1 = 0$ のときは、上で述べたように $z_0 = z_1 = z_2$ となるので、条件を満たすには、$a^2 - a\ell + 1 \neq 0$ とならなければいけない。よって、$\ell = 0$

- $N=3$ のとき

  $n \geqq 1$ のとき、漸化式の第 1 式から $P_n = Q_{n-1}$ が得られるので、それを漸化式の第 2 式に代入すると、 $Q_{n+1} = -Q_{n-1} + \ell Q_n$ となる。　$Q_2 - aQ_3 = 0$ より、

  $-(Q_0 - \ell Q_1) - a(-Q_1 + \ell Q_2) = 0 \quad -(a^2 - \ell a + 1) + \ell\{\ell(a^2 - \ell a + 1)\} = 0$

  $(\ell^2 - 1)(a^2 - \ell a + 1) = 0$。　ここで、$a^2 - \ell a + 1 \neq 0$ より、 $\ell = \pm 1$

ここまでの計算から、$Q_{N-1} - aQ_N = 0$ は、 $f_{N-1}(l)(a^2 - al + 1) = 0$ の形になると推測できる。上の計算から、 $f_0(l) = 1,\ f_1(\ell) = \ell,\ f_2(\ell) = \ell^2 - 1$ である。

$$Q_{N+1} - aQ_{N+2} = (-Q_{N-1} + \ell Q_N) - a(-Q_N + lQ_{N+1})$$

$$= \ell(Q_N - aQ_{N+1}) - (Q_{N-1} - aQ_N) = \ell f_N(\ell)(a^2 - \ell a + 1) - f_{N-1}(\ell)(a^2 - \ell a + 1)$$

$$= \{\ell f_N(\ell) - f_{N-1}(\ell)\}(a^2 - \ell a + 1)$$

であるから、$f_{N+1} = \ell f_N(\ell) - f_{N-1}(\ell)$ とおけば、$Q_{N+1} - aQ_{N+2} = f_{N+1}(\ell)(a^2 - \ell a + 1)$ が成り立つ。以上から、 $\{f_N(\ell)\}$ は

$$\underline{f_0(l) = 1,\ f_1(\ell) = \ell \quad f_{N+1}(\ell) = \ell f_N(\ell) - f_{N-1}(\ell)}$$

により順次定められる。

ところで、第二種チェビシェフ多項式 $U_N(x)$ は、 $\sin N\theta = U_{N-1}(\cos\theta)\sin\theta$ を満たす N 次多項式で、漸化式

$$\underline{U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x \quad U_{N+1}(x) = 2xU_N(x) - U_{N-1}(x)}$$

により順次定められる。

これらを比較して、$f_N(\ell) = U_N\left(\dfrac{\ell}{2}\right)$ であると言える。

以上より、

$$z_N = a \iff \frac{Q_{N-1}}{Q_N} = a \iff Q_{N-1} - aQ_N = 0 \iff U_{N-1}\left(\frac{\ell}{2}\right)(a^2 - \ell a + 1) = 0$$

従って、 $U_{N-1}\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = 0$　または、 $a^2 - \ell a + 1 = 0$ 。

- $U_{N-1}\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = 0$ のとき

  $U_{N-1}(\cos\theta)\sin\theta = 0$ とすると、 $\sin N\theta = 0$。よって、$\theta = \dfrac{k\pi}{N} \quad (k \in \mathbb{Z})$ 。このうち、 $x = \cos\dfrac{k\pi}{N} \quad (k = 1, 2, \quad \cdots \quad N-1)$ は $U_{N-1}(x) = 0$ の相異なる $N-1$ 個の

解であり、 $U_{N-1}(x)$ が x の $N-1$ 次多項式であることから、それらで全ての解となる。

すなわち、$\ell = 2\cos\dfrac{k\pi}{N} \quad (k = 1, 2, \quad \cdots \quad N-1)$ が $U_{N-1}\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = 0$ の解全体である。

- $a^2 - \ell a + 1 = 0$ のとき

  この方程式が成り立つとき、 $a \neq 0$ であり、$\ell = a + \dfrac{1}{a}$ であるから、 $z_1 = \dfrac{1}{\ell - a} = \dfrac{1}{a + \dfrac{1}{a} - a} = a = z_0$ 。従って、 $z_0 = z_1 = \quad \cdots \quad = Z_{N-1}$ となる。

以上により、 $\ell = 2\cos\dfrac{k}{N}\pi \quad (k = 1,\ 2, \quad ,\ N-1)$ かつ $a \neq 0$ が $a^2 - la + 1 = 0$ の解以外のときに、問題 B（N）の解になる。以上で、一般化した問題に関する解答が得られた。(証明終わり)

チェビシェフの多項式については、2023 年京都大学入学試験問題の第 6 問に関連した内容が出題された。この問題に取り組んだ当時高校 2 年生の松野君から「ネット上で大手予備校、その他の解答例を見たが、いずれもチェビシェフの多項式に基づいた解答でした。チェビシェフの多項式についての知識の有無の影響が大きいのですか。他の解法はないのですか。」といった質問があった。その時にには、チェビシェフの多項式を知っていると確かに有利かもしれないが、普通の高校生が知っていることではないこと、また、ド・モアブルの公式を用いた解法もあることを伝えておいた。

松野君は、この時に第二種チェビシェフの多項式まで調べていた。その後、京進の問題 B に取り組んだ際に、問題 B(N) に一般化したうえ、第二種チェビシェフ多項式に結び付けて解決し、問題 B は $N = 5$ の場合だとして解答を得た。素晴らしいことだと思う。

2　一次分数変換を用いた解法

> $z_N = z_0$ を満たすとき、 複素数 α があって、 $\alpha^{2N} = 1, \quad \ell = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ となる

ということを示す方法である。

この解法については、松野君の解法を整理していたときに、 $z_{n+1} = \dfrac{1}{-z_n + \ell}$ は、行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \ell \end{pmatrix}$ により、$z_{n+1} = A < z_n >$ と表される一次分数変換であることに気づき、対角化による N 乗計算を用いて、問題 B(N) の条件にたどり着くことができないかと思ったのであった。

一般に、行列 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で表される一次分数変換は、$A < z > = \dfrac{pz + q}{rz + s}$ のことであり、$A < B < z >> = AB < z >$ が成り立つ。また、 $det(A) \neq 0$ のとき、$z \quad \longrightarrow \quad A < z >$

の逆写像は A^{-1} で表される一次分数変換であることが簡単な計算で示される。これらにより、合成写像は行列の積と対応する。

問題B(N) については、$z_0=a, \quad A^N < z_0 >= z_0$、すなわち $A^N < a >= a$ を満たすような l の値を求めることになる。この方針による解法を考えてみた。

行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \ell \end{pmatrix}$ の固有方程式は、 $det(A-xE)=0$ であるから、

$$-x(\ell-x)-1(-1)=0 \qquad x^2-\ell x+1=0 \quad \cdots \quad ①$$

である。

① の判別式は $D=\ell^2-4$ であるから、 $D=0$ となるのは、 $\ell=\pm 2$ のときである。

- $\ell \neq \pm 2$ のとき

  判別式 $D \neq 0$ であるから、方程式 ① は相異なる 2 つの解を持つ。それを $x=\alpha, \beta$ とおく。解と係数の関係より、 $\alpha+\beta=\ell, \quad \alpha\beta=1$ が成り立つ。

  $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と対角化される。

  $B=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ とする。$A=PBP^{-1}$ であるから、

  $A^n=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdot \quad \cdots \quad \cdot(PBP^{-1})$
  $\quad =PB(P^{-1}P)B(PP^{-1})\cdot \quad \cdots \quad \cdot(PP^{-1})BP^{-1}=PB^nP^{-1}$

  $A^N < a >= a$ とすると、$PB^NP^{-1} < a >= a, \quad B^NP^{-1} < a >= P^{-1} < a >$

  $P^{-1} < a >= b$ とおくと、$B^N < b >= b$ となる。

  $B^N=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^N=\begin{pmatrix} \alpha^N & 0 \\ 0 & \beta^N \end{pmatrix}$ であるから、 $\dfrac{\alpha^N b+0}{0\cdot b+\beta^N}=b \qquad \dfrac{\alpha^N}{\beta^N}b=b$。

  解と係数の関係より、$\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ であったから、$\alpha^{2N}b=b$。

  よって、$b=0$ もしくは $\alpha^{2N}=1$ である。

  - $b=0$ のとき
    $a=P < b >= P < 0 >= \dfrac{1\cdot 0+1}{\alpha\cdot 0+\beta}=\alpha$ なので、$z_1=\dfrac{1}{-\alpha+\ell}=\dfrac{1}{-\alpha+(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{\beta}=\alpha=z_0$。したがって、 $z_0=z_1=z_2= \quad \cdots$ となる。

  - $b \neq 0, \quad \alpha^{2N}=1$ のとき
    $\alpha=e^{\frac{2\pi ki}{2N}}=e^{\frac{\pi ki}{N}} \quad (k \in \mathbb{Z})$ であるから、
    $\ell=\alpha+\beta=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=e^{\frac{\pi ki}{N}}+e^{-\frac{\pi ki}{N}}=2\cos\dfrac{k\pi}{N}$ 。
    $\ell \neq \pm 2$ なので、上記で $k=1,2, \quad \cdots \quad ,N-1$ としてよい。

- $\ell = \pm 2$ のとき

  このときは、$z_N = z_0 \quad (N \geqq 1)$ が成り立たないことを示す。

  $\ell = 2$ のとき、$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

  固有方程式は、$x^2 - 2x + 1 = 0$、 固有値は $x = 1$ （重解）である。

  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と三角行列になる。

  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

  $A^N < a >= a$ とすると、 $PB^NP^{-1} < a >= a, \quad B^NP^{-1} < a >= P^{-1} < a >$

  $P^{-1} < a >= b$ とおくと。 $B^N < b >= b$。

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法で示すことができるので 、$b+N = b$ となる。これから $N = 0$ となるので、$N \geqq 1$ で $z_0 = z_N$ が成り立つことはない。

  $\ell = -2$ のときも同様である。

以上から、問題 B(N) の必要十分条件は $\ell = 2\cos\dfrac{\pi k i}{N} \quad (k = 1, 2, \quad \cdots \quad , N-1)$ であることが示された。（証明終わり）

一次分数変換は、楕円モジュラー形式に関連して、複素上半平面 $\{z = x+iy \quad | \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad y > 0\}$ の変換として現れる。しばらく、その分野に触れることがなかったが、今回の問題のおかげで久しぶりに一次分数変換を使ってみることになった。対角化のおかげで見やすい解法にできたものと思う。