2023年京都大学入試問題理系第6問のド・モアブルの定理による解答について

2023年3月
片山　喜美

以下のような出題があった。

2023年前期　京都大学　理系

6．p を3以上の素数とする．また，θ を実数とする．

(1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m, n が存在するか否かを理由をつけて判定せよ．

(1) は教科書の内容であるが、(2) は難しいのではないだろうか。次の等式が成り立つことを用いる。

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + a_{n-2}\cos^{n-2}\theta + \quad\cdots\quad + a_1\cos\theta + a_0 \quad \cdots Ⓐ$$

ここで、 $a_{n-1}, a_{n-2}, \quad\cdots\quad a_1, a_0$ は整数である。

この式Ⓐに　$\cos n\theta = \cos m\pi = \pm 1,\ \cos\theta = \dfrac{1}{p}$ を代入すると、

$$\pm 1 = \frac{2^{n-1}}{p^n} + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{p^{n-2}} + \quad\cdots\quad + \frac{a_1}{p} + a_0$$

両辺に p^{n-1} をかけて、以下のように整理する。

$$\frac{2^{n-1}}{p} = -a_{n-1} - a_{n-2}p - \quad\cdots\quad - a_1 p^{n-2} - a_0 p^{n-1} \pm p^{n-1}$$

上式の右辺は整数であるから、左辺の $\dfrac{2^{n-1}}{p}$ も整数でなければならない。しかし、 p は3以上の素数であるから、$\dfrac{2^{n-1}}{p}$ は整数になりえない。従って、条件を満たす正の整数 m, n は存在しない。

式Ⓐでポイントになるのは、以下のことである。

- $\cos n\theta$ が $\cos\theta$ の整数係数の n 次式で表される。

- 特に、最高次の係数は 2^{n-1} である。（2 以外の素因数を持たない。）

では、式 Ⓐ をどのように思いついていくのか？

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \quad \cdots \quad + a_1 x + a_0 \quad (a_n, a_{n-1}, \quad \cdots \quad, a_1, a_0$ は整数) について、$f(x) = 0$ が $x = \dfrac{1}{p}$ を解に持つならば、$f(x)$ は $px - 1$ を因数に持つ。（有理数係数の範囲で因数分解できるならば、整数係数の範囲で因数分解できることによる。）従って、$f(x)$ の最高次の係数は p を素因数に持つ。

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \quad \cos 3\theta = 4\cos^3 - 3\cos\theta, \quad \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ であるから、$f(x)$ は $2x^2 - 1, \quad 4x^3 - 3x, \quad 8x^4 - 8x^2 + 1$ となり、最高次の係数は 2^{n-1} になり、3 以上の素数 p を素因数に持つことがないと推測される。

という風に考えるのかもしれない。ただ、試験会場で普通の受験生が思いつくのは簡単ではないのではと思う。$2x^2 - 1, \quad 4x^3 - 3x, \quad 8x^4 - 8x^2 + 1$ など、$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表すものを「チェビシェフの多項式」という。$\cos n\theta$ を表すチェビシェフ多項式を $T_n(x)$ とすると、$\cos\theta$ の加法定理から $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ が得られる。すると、帰納的に「$T_n(x)$ は整数係数の n 次式であり、その最高次の係数は 2^{n-1} である」ことが証明できる。

この問題に取り組んだ 2 年生の M 君から「ネット上で大手予備校、その他の解答例を見たが、いずれもチェビシェフの多項式に基づいた解答でした。チェビシェフの多項式についての知識の有無の影響が大きいのですか。他の解法はないのですか。」といった質問があった。（質問を解釈するとそのような内容だと思った。）もちろん、チェビシェフの多項式を知っている人は有利であっただろうし、そのような高校生は合格してしかるべき-であろう。

式 Ⓐ については、

> ド・モアブルの定理
>
> $$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

による証明もある。(1) も含めて以下のようになる。

(1) $\cos n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ の展開式の実部であるから

- $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

- $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\sin^2\theta + \sin^4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2(1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos^2\theta)^4$
$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

(2) $\cos n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ の展開式の実部 $= \displaystyle\sum_{l=0}^{m} {}_nC_{2l} \cos^{2-2l}\theta \cdot (-1)^l \sin^{2l}\theta$

ただし、 $m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ である。

さらに計算を進めて

$$= \sum_{l=0}^{m} {}_nC_{2l} \cos^{n-2l}\theta \cdot (\cos^2\theta - 1)^l$$

$$= \sum_{l=0}^{m} {}_nC_{2l} \cos^{n-2l}\theta \cdot \{\cos^{2l}\theta - {}_lC_1 \cos^{2l-2}\theta + \quad \cdots \quad + (-1)^l\}$$

これは、$\cos\theta$ の整数係数の n 次式である。また、その最高次の係数は $\displaystyle\sum_{l=0}^{m} {}_nC_{2l}$ である。

ここで、

$$(1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \quad \cdots \quad + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

$$(1-1)^n = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \quad \cdots \quad + (-1)^{n-1}{}_nC_{n-1} + (-1)^n{}_nC_n$$

辺々加えて

$$2^n = 2({}_nC_0 + {}_nC_2 + \quad \cdots \quad + {}_nC_{2m}) \qquad \left(m = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

よって、最高次の係数は $\displaystyle\sum_{l=0}^{m} {}_nC_{2l} = 2^{n-1}$ となり、式 Ⓐ が示された。

大学入試の問題としては難しかったものと思うが、この問題を通して、高校で教える側も、数学に興味を持って学ぶ生徒も、いろいろ勉強になるのではないかと思う。