べき乗和　$1^l + 2^l + \cdots + n^l$　について　ver.2

2023年1月
片山　喜美

1　べき乗和の公式の作り方について

高校1年生の数学で

- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

が成り立つことを学ぶ。そして、これらの公式を用いて数列の和を求める問題を取り扱う。

では、$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$ はどうなるのか？また、さらに次数の大きなべき乗和についての公式はどうなるのか？

それには、展開式を見ていくといいのである。上記で得られた和を展開すると

- $\dfrac{1}{2}n(n+1) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n,$
- $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \dfrac{1}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{6}n,$
- $\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \dfrac{1}{4}n^4 + \dfrac{1}{2}n^3 + \dfrac{1}{4}n^2$

となる。

これらをみると、l 乗の和は、n の $l+1$ 乗式になっている。また、定数項は 0 である。

そこで、$1^l + 2^l + \cdots + n^l$ の結果として得られる n の $l+1$ 次式の係数を左詰で並べてみる。なお、$l = 0$ のときの、$1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = n$ も含めている。

l				
0	1			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

次の $l = 4$ の段の係数について、証明を後回しにして、作り方を以下に述べる。

- $l = 3$ の段の係数を順に、$\dfrac{4}{5}$ 倍、$\dfrac{4}{4}$ 倍、$\dfrac{4}{3}$ 倍、$\dfrac{4}{2}$ 倍して、$\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 0$ となる。これらが5次から2次の係数となる。

- それらの係数をすべて加えたものを 1 から引く。$1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{30}$ となる。これが 1 次の係数となる。
- 以上から $1^4+2^4+\quad\cdots\quad+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$ となる。

その次の $l=5$ の段の係数についても、以下の作業で作ることができる。

- $l=4$ の段の係数を順に、$\frac{5}{6}$ 倍、$\frac{5}{5}$ 倍、$\frac{5}{4}$ 倍、$\frac{5}{3}$ 倍、$\frac{5}{2}$ 倍して、$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, 0, -\frac{1}{12}$ となる。これらが 6 次から 2 次の係数となる。
- それらの係数をすべて加えたものを 1 から引いて、$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{12}\right)=0$ となる。これが 1 次の係数となる。
- 以上から $1^5+2^5+\quad\cdots\quad+n^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$ となる。

以下同様にして、簡単な規則で和の公式を作っていくことができる。その規則は以下のとおりである。

$1^l+2^l+\quad\cdots\quad+n^l=a_{l+1}n^{l+1}+a_ln^l+\quad\cdots\quad+a_1n$

であるとき、

- $b_k=\frac{l+1}{k}a_{k-1}\quad(k=2, 3,\quad\cdots\quad, l+2)$
- $b_1=1-(b_{l+2}+b_{l+1}+\quad\cdots\quad+b_2)$

により $b_1, b_2,\quad\cdots\quad, b_{l+2}$ を定めると

$1^{l+1}+2^{l+1}+\quad\cdots\quad+n^{l+1}=b_{l+2}n^{l+2}+a_{l+1}n^{l+1}+\quad\cdots\quad+b_1n$

が成り立つ。

その結果得られる $l=0, 1, 2,\quad\cdots\quad, 10$ のべき乗和の係数は、以下のとおりである。

l											
0	1										
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$								
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0							
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{30}$						
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0					
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{42}$				
7	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{1}{12}$	0			
8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{30}$		
9	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{20}$	0	
10	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	-1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{66}$

この表を見ると、l 次のべき乗和は、 n の $l+1$ 次の多項式で

$$1^l+2^l+\quad\cdots\quad+n^l=a_{l+1}n^{l+1}+a_ln^l+a_{l-1}n^{l-1}+\quad\cdots\quad+a_1n$$

と表すとき、次のことが成り立っていることに気づく。[1]

(1) 定数項は 0 である。

(2) 最高次の係数は $a_{l+1}=\dfrac{1}{l+1}$ である。

(3) 最高次から 2 番目のの係数は、常に $a_l=\dfrac{1}{2}$ である。$(l\geqq 1)$

(4) 最高次から 3 番目の係数は、$a_{l-1}=\dfrac{l}{12}$ である。$(l\geqq 2)$

(5) 最高次から 4 番目の係数は $a_{l-2}=0$ である。また、それ以降、1 つ飛びで係数が 0 となる。$(l\geqq 3)$

これらについていての証明は、後ほど述べる。

2 差分による公式の求め方について

高校の教科書では、以下のような取り扱いをしている。

- 等差数列の和の公式を用いて $1+2+\quad\cdots\quad+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ を証明する。
- 恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を用いて $1^2+2^2+\quad\cdots\quad+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明する。その際、$1+2+\quad\cdots\quad+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ を使う。
- 恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて $1^3+2^3+\quad\cdots\quad+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を証明することを練習問題としている。その際、1 乗と 2 乗のべき乗和の公式を使う。それを整理するには、ある程度の計算が必要となる。

この方法を延長していってもべき乗和の公式を順次つくっていけるが、大変な作業になる。また、上記に述べた係数に関する簡単な規則を見つけるのは難しいように思われる。

そこで、差分の方法（階差数列の考え方とも言える）を用いた方法を考えてみる。

- $1+2+\quad\cdots\quad+n$ について
  $a_k=ak^2+bk\quad(a,\,b$ は実数の定数）　とおいて、 $a_k-a_{k-1}=k$ とならないか考えてみる。

  $$(ak^2+bk)-\{a(k-1)^2+b(k-1)\}=k,\qquad 2ak-a+b=k$$

[1] 性質 (1),(2),(3) については、以前まとめたレポート (参考文献 [1],[2]) にも書いておいた。今回、べき乗和について、高校生にも読みやすいものにしようと書き直していくうち、性質 (4),(5) にも気が付いた。

これが k についての恒等式になるのは $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$ のときである。

よって、 $a_k=\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{2}k$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})$$

$$=(a_1+a_2+\quad\cdots\quad+a_n)-(a_0+a_1+\quad\cdots\quad+a_{n-1})$$

$$=a_n-a_0=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

- $1^2+2^2+\quad\cdots\quad+n^2$ について
  $a_k=ak^3+bk^2+ck\quad(a, b, c$ は実数の定数） とおいて、 $a_k-a_{k-1}=k^2$ とならないか考えてみる。

  $(ak^3+bk^2+ck)-\{a(k-1)^3+b(k-1)^2+c(k-1)\}=k^2$

  $\quad 3ak^2+(-3a+2b)k+a-b+c=k^2$

  これが k についての恒等式になるのは
  $3a=1,\quad -3a+2b=0,\quad a-b+c=0$
  のときである。従って、$a=\dfrac{q}{3}, b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{1}{6}$

  よって、 $a_k=\dfrac{1}{3}k^3+\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{6}k$ となり、前と同じ計算により、次が従う。

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

3　l 次のべき乗和の係数から $l+1$ 次のべき乗和の係数を求める規則について

$a_k-a_{k-1}=k^l$ となる数列 $\{a_k\}$ を用いて和の公式を作る方法は便利である。高校の教科書もこの方法を取り入れてもいいのではないかと思う。

ここでは、さらに、l 次のべき乗和の係数から $l+1$ 次のべき乗和の係数を求める規則について考察してみる。

x の $l+1$ 次関数で、恒等式 $f(x)-f(x-1)=x^l,\quad f(0)=0$ を満たすものがあればよい。

例えば、$l=3$ については、 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{4}x^2$ とすれば、
$f(x)-f(x-1)=x^3,\ f(0)=0$ 　を満たす。

次に、$g(x)=b_5x^5+b_4x^4+b_3x^3+b_2x\ 2+b_1x$ が 恒等式 $g(x)-g(x-1)=x^4$ を満たすものとする。未定係数法で係数を決定するのではなく、これを 3 次の恒等式に結び付けることを考える。

両辺を x について微分すると、 $g'(x)-g'(x-1)=4x^3$ が恒等式になる。従って、$g'(x)-g'(x-1)=4\{f(x)-f(x-1)\}$ が成り立つ。よって、

$5b_5\left\{x^4-(x-1)^4\right\}+4b_4\left\{x^3-(x-1)^3\right\}+3b_3\left\{x^2-(x-1)^2\right\}+2b_2\left\{x-(x-1)\right\}$
$=4\left[\dfrac{1}{4}\left\{x^4-(x-1)^4\right\}+\dfrac{1}{2}\left\{x^3-(x-1)^3\right\}+\dfrac{1}{4}\left\{x^2-(x-1)^2\right\}\right]$

これが x の恒等式になるので、

$5b_5=4\cdot\dfrac{1}{4},\quad 4b_4=4\cdot\dfrac{1}{2},\quad 3b_3=4\cdot\dfrac{1}{4},\quad 2b_2=0$

よって、5 次から 2 次までの係数が、 $b_5=\dfrac{1}{5},\quad b_4=\dfrac{1}{2},\quad b_3=\dfrac{1}{3},\quad b_2=0$ と求まる。

残るは 1 次の係数である。 $g(x)-g(x-1)=x^4$ に $x=1$ を代入して、 $g(1)=1$
$b_5+b_4+b_3+b_2+b_1=1,\qquad b_1=1-(b_5+b_4+b_3+b_2)=-\dfrac{1}{30}$

従って、 $g(x)=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{30}x$ であり、

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\sum_{k=1}^{n}\left\{g(k)-g(k-1)\right\}=g(n)-g(0)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}$$

3 乗和の係数に結びつけて 4 乗和の係数を求めた上記の方法と同様に、一般に、 l 乗和の係数から $l+1$ 乗和の係数を計算していけることを示す。

$f(x)=a_{l+1}x^{l+1}+a_lx^l+\quad\cdots\quad+a_1x$ が $f(x)-f(x-1)=x^l\qquad\cdots$① を満たし、

$g(x)=b_{l+2}x^{l+2}+b_{l+1}x^{l+1}+\quad\cdots\quad+b_1x$ が $g(x)-g(x-1)=x^{l+1}\qquad\cdots$② を満たすとする。

② の両辺を x で微分して、① を代入すると

$g'(x)-g'(x-1)=(l+1)\left\{f(x)-f(x-1)\right\}$

左辺$=(l+2)b_{l+2}\left\{x^{l+1}-(x-1)^{l+1}\right\}+(l+1)b_{l+1}\left\{x^l-(x-1)^l\right\}+\quad\cdots\quad+2b_2\left\{x-(x-1)\right\}$
$=\displaystyle\sum_{k=1}^{l+1}(k+1)b_{k+1}\left\{x^k-(x-1)^k\right\}$

右辺$=(l+1)\left[a_{l+1}\left\{x^{l+1}-(x-1)^{l+1}\right\}+a_l\left\{x^l-(x-1)^l\right\}+\quad\cdots\quad+a_1\left\{x-(x-1)\right\}\right]$
$=(l+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{l+1}a_k\left\{x^k-(x-1)^k\right\}$

左辺=右辺 が x の恒等式になるのは、

$(k+1)b_{k+1}=(l+1)a_k\qquad(k=1,2,\quad\cdots\quad,l+1)$

のときである。

これから b_k を求める形にすると

$$b_k=\frac{l+1}{k}a_{k-1}\quad(k=2,3,\quad\cdots\quad,l+2)$$

となる。

これで、 $b_{l+2},b_{l+1},\quad\cdots\quad,b_2$ が求まる。残るのは b_1 であるが、

$$g(x)-f(x-1)=x^{l+1}\quad g(0)=0$$

であるから、$g(1)-g(0)=1\qquad b_1+b_2+\quad\cdots\quad+b_{l+2}=1$

よって、$b_1=1-(b_2+\quad\cdots\quad+b_{l+2})$

以上をまとめると、以下の規則が成り立つと言える。そして、べき乗和の公式が簡単な規則で順次求めていけることがわかる。

$1^l + 2^l + \quad \cdots \quad + n^l = a_{l+1}n^{l+1} + a_l n^l + \quad \cdots \quad + a_1 n$
であるとき、

- $b_k = \dfrac{l+1}{k} a_{k-1} \quad (k = 2, 3, \quad \cdots \quad , l+2)$
- $b_1 = 1 - (b_{l+2} + b_{l+1} + \quad \cdots \quad + b_2)$

により $b_1, b_2, \quad \cdots \quad , b_{l+2}$ を定めると
$1^{l+1} + 2^{l+1} + \quad \cdots \quad + n^{l+1} = b_{l+2}n^{l+2} + a_{l+1}n^{l+1} + \quad \cdots \quad + b_1 n$
が成り立つ。

なお、この規則で係数を順次求めていくと、次が成り立つ。

定理 3.1 l 次のべき乗和は、n の $l+1$ 次の多項式で

$$1^l + 2^l + \quad \cdots \quad + n^l = a_{l+1}n^{l+1} + a_l n^l + a_{l-1}n^{l-1} + \quad \cdots \quad + a_1 n$$

と表すとき、次のことが言える。

(1) 定数項は 0 である。

(2) 最高次の係数は $a_{l+1} = \dfrac{1}{l+1}$ である。

(3) 最高次から 2 番目の係数は、常に $a_l = \dfrac{1}{2}$ である。$(l \geqq 1)$

(4) 最高次から 3 番目の係数は、$a_{l-1} = \dfrac{l}{12}$ である。$(l \geqq 2)$

(5) 最高次から 4 番目の係数は $a_{l-2} = 0$ である。また、それ以降、1 つ飛びで係数が 0 となる。$(l \geqq 3)$

証明)

(1) $(k+1)^{l+1} - k^{l+1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{l} {}_{l+1}C_m k^m$ より

$$(l+1)k^l = (k+1)^{l+1} - k^{l+1} - \sum_{m=0}^{l-1} {}_{l+1}C_m k^m$$

$k = 1$ から n まで加えて

$$(l+1)\sum_{k=1}^{n} k^l = (n+1)^{l+1} - 1^{l+1} - \sum_{m=0}^{l-1} {}_{l+1}C_m \sum_{k=1}^{n} k^m$$

右辺において、$(n+1)^{l+1} - 1^{l+1}$ は n で割り切れ、さらに、0 次から $l-1$ 次までのすべてのべき乗和の定数項が 0 であると仮定すると、右辺は n で割り切れる。従って左辺は n で割り切れる。

(2) 最高次の係数は $l=0$ のときの 1 から始まって、 順次 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \quad \cdots \quad, \frac{l}{l+1}$ を掛けていくので、 $a_{l+1} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \frac{l}{l+1} = \frac{1}{l+1}$

(3) 最高次から 2 番目の係数は、 $l=1$ のときの $\frac{1}{2}$ から始まって、順次 $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \quad \cdots \quad, \frac{l}{l}$ を掛けていくので、l に関わらず常に $a_l = \frac{1}{2}$ である。

(4) 最高次から 3 番目の係数は、 $l21$ の時の $\frac{1}{6}$ から始まって、順次 $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \quad \cdots \quad, \frac{l}{l-1}$ を掛けていくので、
$a_{l-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \frac{l-1}{l-2} \cdot \frac{l}{l-1} = \frac{l}{12}$ となる。

(5) $l=3$ のとき、最高次から 4 番目の係数が 0 になっているので、 $l \geqq 4$ についても、最高次から 4 番目の係数は順次算出していく規則からすべて 0 になる。

1 つおきに 0 が現れることは、l が奇数のときに、 n の係数が 0 となること（表の右端に 0 が出ること）を証明すれば、それより次数の高いべき乗和について、すべて 0 になっていくことから証明される。

数学的帰納法で示す。$l = 3, 4, 5, \quad \cdots \quad, 2m$ まで、「最高次から 4 番目、6 番目、… の係数が 0 である」が成り立っているとして、 $l = 2m+1$ についてのべき乗和を考える。

$f(x) = a_{2m+2}x^{2m+2} + a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \quad \cdots \quad + a_1 x$

が 恒等式 $\quad f(x) - f(x-1) = x^{2m+1}, \quad f(0) = 0$ を満たすとする。

$x=1$ を代入して、 $f(1) = 1$。 従って

$$\sum_{k=1}^{2m+2} a_k = 1 \qquad \cdots ①$$

$x=0$ を代入して、 $-f(-1) = 0$。 従って

$$\sum_{k=1}^{2m+2} (-1)^k a_k = 0 \qquad \cdots ②$$

① − ② より、

$$2\sum_{k=1}^{m+1} a_{2k-1} = 1 \qquad \cdots ③$$

係数について帰納法の仮定より、

$$a_{2m+1} = a_l = \frac{1}{2}, a_{2m-1} = a_{2m-3} = \quad \cdots \quad = a_3 = 0$$

である。.③ に代入して

$$2\left(\frac{1}{2} + 0 + 0 + \quad \cdots \quad + 0 + a_1\right) = 1$$

よって、 $a_1 = 0$ が得られる。

以上で、定理の証明終わり。

なお、最高次から5番目の係数は $l=4$ のときの $-\dfrac{1}{30}$ から始まって、順次 $\dfrac{5}{2}, \dfrac{6}{3}, \quad \cdots \quad, \dfrac{l}{l-3}$ を掛けていくので、

$$
\begin{aligned}
a_{l-3} &= -\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot \quad \cdots \quad \cdot\frac{l-1}{l-4}\cdot\frac{l}{l-3} \\
&= -\frac{1}{30}\cdot\frac{(l-2)(l-1)l}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{(l-2)(l-1)l}{720}
\end{aligned}
$$

となる。同様に、最高次から7番目の係数は $\dfrac{1}{252}\cdot {}_lC_5$ になる。そのほかについても、最初に現れる数値から順次掛け算をしていくことで、係数がどのようなものになるかわかる。ただし、最初に現れる数値が何になるかの規則が問題となる。その他にも、何か係数について言えることがあるのか、課題である。きっと誰かが見つけるだろう。（見つかっているのだろう）

参考文献

[1] 「べき乗和の公式について（改訂版）」　片山　喜美 2014年
http://ja9nfo.web.fc2.com/math/bekijouwa.pdf

[2] 「差分による数列の和の工夫について」片山　喜美 2017年
http://ja9nfo.web.fc2.com/math/2912sum-by-diff.pdf