D.J.Newmanのアイディアに基づいた素数定理の簡明な証明について

2022年8月25日 Version 1
片山　喜美

はじめに

今年（2022年）の2月頃、国語の広子先生と雑談をしていた際に、マーカス デュ・ソートイ著「素数の音楽」に話題が及んだ。広子先生は「私は数学の内容についてはわかりませんでしたが、数学者の生き方や考え方がよくわかり、とても面白い本でした。」とおっしゃられた。僕はこの本の存在を以前から知っていたが、てっきり音楽に関する本だと思っていたので手に取ることがなかった。ところが、話を聞いてみると音楽に関する本ではなく、素数に取り組んできた数学者たちの物語だという。さっそく読んでみると、オイラーやガウス、リーマンをはじめ、ジーゲル、ザギヤ、その他の著名な数学者たちが登場し、様々な物語が生き生きと描かれていた。なんでもっと早くに読まなかったのだろうと思った。

素数に関する物語の1つの中心となるのは素数定理である。それは以下のような定理である。

＜＜素数定理＞＞

$x > 0$ に対して、 x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表すと、

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1 \right)$$

素数定理はGaussによって予想された。その100年あまり後の1896年にHadamardとde la Vallée Poussinが独立に素数定理を証明したこと、またSelbergとErdösが初等的な証明を与えたことについては知っていた。しかし、それらの証明はとても難しく、僕には理解できないことが明白で、調べることすらしていなかった。

今回、「素数の音楽」を読んでWeb上で素数定理について検索しているうち、大学学部生に理解できる「Newmanによる証明」があることを知った。それなら僕にも理解できるのではないかと思い、いくつかの文献を調べてみることにした。

目 次

1　素数定理にかかわる歴史

- Euclid の時代（紀元前 3 世紀頃）から素数 $2, 3, 5, 7, \quad \cdots$ が無数にあることが知られていた。そして、「n 番目の素数は何になるのかを n の式でうまく表せないか？」という課題への挑戦が何世紀にもわたって続けられた。しかし、素数は極めて不規則に登場するので、それを何らかの関数を用いて表すことに誰も成功することができなかった。

- 18 世紀末、Gauss（1777 − 1855）や Legendre（1752 − 1833）はそれまでに得られていたたくさんの素数のデータをもとに、「n 番目の素数は何になるのかを n の式で表す」ことのかわりに「x 以下の素数の個数はどのくらいあるか」を考えた。それは新たな方向の考え方であった。そして「素数定理」が予想されたのであった。

  Gauss はなんと 15 歳のときに素数定理を予想していた。当時は、対数表が航海士や銀行家、商人たちにとって必要不可欠なものであった。複雑な掛け算を行う必要があり、それは大変な困難を伴うものであったが、対数を用いることにより足し算に置き換えることで処理できたのであった。小さいころから数学に目覚ましい才能を発揮していた Gauss 少年が対数の本をプレゼントされた。その本の巻末には、素数の表も載せられていた。実用に不可欠な対数の本の巻末に実用とは無縁と思われる素数の表が掲載されることは珍しかったと思われる。普通なら、無用なものがついているとしか思われないのであるが、15 歳にして既に素数について膨大な計算をしていた Gauss が 2 つの表を見比べて素数定理に到達したという。歴史に残るすごい出来事である。ただし、Gauss はこの発見を生前公表しておらず、一度だけ手紙の中で触れたことがあったとのことである。証明のないものは公表しないという Gauss の頑なな態度がそうさせたのであろうか。

  同時代の Legendre も類似の漸近的予想を行っている。Gauss のものに比べて少し補正項を追加しており、ある程度の x までは Gauss の予想より誤差が少ない。このため, Legendre の予想のほうが優れていると思われたかもしれない。しかし、さらに大きな x になると Gauss の予想のほうが誤差が少なくなるとのことである。

- $\pi(x)$ の正しい order について、初めて成果を得たのは Cebyshev（1821 − 1894）であった。Chebyshev は $\dfrac{x}{\log x} \times 0.921 < \pi(x) < \dfrac{x}{\log x} \times 1.106$ が十分大きな x について成り立つことを示した。ただ、Chebyshev の方法の延長では、素数定理の証明には至らなかった。

- Chebyshev の論文の数年後、Riemann（1826 − 1866）によって素数定理の証明への新たな道が切り開かれた。Riemann の革命的なアイディアは Euler が創始した ζ 関数を複素数の関数として考えて、$\pi(x)$ を ζ 関数を含む複素積分で表すというものであった。そして、素数定理の証明には ζ 関数の零点がカギとなることを Riemann は認識していた。しかしながら、その時代にはまだ複素解析学の発展が十分でなく、素数定理を証明するために必要な材料がそろったのは 19 世紀末のことであった。

- 素数定理は、1896 年に Hadamard（1865 − 1963）と de la Vallé Poussin（1866 − 1962）によって、独立に証明された。それらの証明は、$\zeta(s)$ が $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないことを示し、素数定理をそれに結びつけるものであった。ただし、$\zeta(s)$

が直線 $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないことの最初の証明はかなり難しいものであった。その後、証明が改良、洗練さｒてていったとのことである。また、当初は $\zeta(s)$ が $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないことだけでは、素数定理を証明することができなかった。当時の証明を大学学部生レベルの知識で理解することはかなり難しいものと思われる。

- 素数定理が成り立つならば、$\zeta(s)$ が 直線 $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないことが示された。逆に、「$\zeta(s)$ が直線 $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないならば素数定理が成り立つことを証明できるか」 が問題となった。この問題は 1930 年頃、Wiener（1894 − 1964）によって解決された。Wiener は「Ikehara[1]-Wiener Theorem」と呼ばれる Tauber 型定理を用いて、$\zeta(s)$ が直線 $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないことから素数定理を証明できることを示したのである。

- 1980 年、D.J.Newman は、$(s-1)\zeta(s)$ が 半平面 $Re(s) \geq 1$ において正則で零点を持たないことを用いて、素数定理の簡明な証明を与えた。Ikehara-Wiener Theorem や Mellin inversion integral を使う代わりに、

$$\int_W \frac{x^s}{s}\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}ds$$

  のタイプの積分の絶対値が R が十分大きいときにどのように評価されるかについて考えた。

  その後、Newman のアイディアをさらにわかりやすくする工夫もあった。このレポートでは、そうした文献について調べてみた。

  なお、Newman は、映画「Beautiful Mind」の主人公の J.Nash の同僚であるとのことである。これもまた、奇遇なことだと思われた。

＜注意＞

素数定理の証明については、別の流れとして、Selberg と Erdös による「初等的な証明」がある。（「初等的な」というのは「簡単な」という意味では決してない。複素数の微積分等を用いないというような意味であり、その証明はかえって難しいのではないか。）

Chebyshev の方法の延長では素数定理の証明がうまくいかず、Hadamard や de la Vallé Poussin が Riemann による道筋に従って証明に成功したことから、Hardy やその他の人々からは「素数定理は Riemann zeta 関数を用いてのみ証明することができる」と言われるようになっていった。この信念は、Wiener が「素数定理は $\zeta(s)$ が直線 $Re(s) = 1$ 上に零点を持たないことと同値である」ことを示したことから一層強くなった。しかしながら Selberg は、「a kind of weighted analogue of Chebyshev's identity」を開発し、1949 年に「素数定理の初等的な証明」を与えたのであった。これは大きな驚きであったという。Erdös もまた、Selberg とは独立に初等的な証明を与えている。

[1]池原 止戈夫 (1904 年 4 月 11 日 - 1984 年 10 月 10 日) マサチューセッツ工科大学でノーバート・ウィーナーに師事し 1928 年卒業。1932 年にはウィーナーとともにタウバー型定理を確立、その応用として素数定理の新しい証明を与えた。帰国後、東京工業大学教授などを歴任。ウィーナーが提唱したサイバネティックスの学理を追求するとともに、その国内普及に寄与した。

2　Newmanのアイディアに基づいた証明のあらすじ

証明には、次のような関数を用いる。

- $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (Re(s) > 1) \qquad \cdots \quad$ Riemannのzeta関数
- $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$
- $\Phi(z) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^z} \quad (Re(z) > 1)$

次のような手順で証明を進める。

(1) $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ が右半平面 $Re(s) > 0$ まで正則に解析接続できることを示す。

(2) $\vartheta(x) = O(x)$ を示す。

(3) $\vartheta(x) \sim x$ を示す。

(4) $\vartheta(x)$ と $\pi(x)$ の関係式を求める。さらに、 $\vartheta(x) \sim x$ から $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ を示す。

3　Riemannのzeta関数

$s \in \mathbb{R}, \quad s > 1$ に対して、 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ と定義する。

補題 3.1

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ のとき収束する。また、 $\lim_{s \to 1+0} \zeta(s) = +\infty, \quad \lim_{s \to 1+0} (s-1)\zeta(s) = 1$ が成り立つ。

証明）

$$1+\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} \le 1+\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^s} = 1+\int_{1}^{N} x^{-s} dx = 1+\left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_1^N = 1+\frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{N^{s-1}}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{s-1}$$

よって、 $s > 1$ のとき、 $\zeta(s)$ は収束する。

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \ge \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{dx}{x^s} = \int_{1}^{N+1} x^{-s} dx = \left[\frac{1}{1-s} x^{-s+1} dx\right]_1^{N+1} = \frac{1}{s-1}\left\{1 - \frac{1}{(N+1)^{s-1}}\right\}$$

$N \to \infty$ として、 $\zeta(s) \ge \frac{1}{s-1}$ 　　　ゆえに、 $\lim_{s \to 1+0} \zeta(s) = +\infty$

また、 $\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}$ より $s > 1$ において、$1 \le (s-1)\zeta(s) \le (s-1) + 1$

ゆえに、 $\lim_{s \to 1+0} (s-1)\zeta(s) = 1$ 　　（証明終わり）

補題 3.2

$s \in \mathbb{C}$　$Re(s) > 1$ のとき、 $\zeta(s)$ は絶対収束して、 s の正則関数となる。

証明） $\dfrac{1}{n^s} = e^{-s\log n}$ より、 $\left|\dfrac{1}{n^s}\right| = e^{-Re(s)\log n} = \dfrac{1}{n^{Re(s)}}$

前の補題から、無限級数は、$Re(s) > 1$ のとき絶対収束する。　よって s の正則関数となる。　（証明終わり）

定理 3.3

$Re(s) > 1$ のとき、 $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p:\text{素数}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$

証明） $N > 1$ を自然数、 実数 $s > 1$、 $P_N(s) = \displaystyle\prod_{p \le N} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$ とする。

$0 < \left|\dfrac{1}{p^s}\right| < 1$ より、

$$1 - p^{-s} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p^s}\right)} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \quad \cdots$$

従って、 $P_N(s) = \displaystyle\prod_{p \le N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \quad \cdots\right) = \sum_{n\ \text{の素因数はすべて}\ N\ \text{以下}} \frac{1}{n^s}$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} < P_N(s) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

ゆえに、 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} P_N(s) = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} = \zeta(s)$　　（証明終わり）

定理 3.4

$\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は $Re(s) > 0$ まで正則に解析接続できる。

証明） $Re(s) > 1$ のとき、

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} s \int_n^{n+1} \left(\int_n^x \frac{du}{u^{s+1}}\right) dx$$

ここで、 $n \le u \le n+1$ のとき、 $n^{Re(s)+1} \le |u^{s+1}| \le (n+1)^{Re(s)+1}$ より、

$$\frac{1}{n^{Re(s)+1}} \ge \left|\frac{1}{u^{s+1}}\right| \ge \frac{1}{(n+1)^{Re(s)+1}}$$

従って、

$$\left|s \int_n^{n+1} \left(\int_n^x \frac{du}{u^{s+1}}\right) dx\right| \le \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}} \int_n^{n+1} \int_n^x du\ dx = \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}} \int_n^{n+1} (x-u) dx$$

$$\le \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}} \int_n^{n+1} dx = \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$$

これにより、

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| \leq |s| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$$

右辺の無限級数は $Re(s) > 0$ のとき収束するので、 $\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right|$ は有界である。よって、$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ は正則関数となる。　（証明終わり）

4　$\vartheta(x) = O(x)$ について

定理 4.1

$^{\exists}k > 0 \quad s.t. \quad x > 0$ のとき、 $\vartheta(x) \leq kx$ が成り立つ。すなわち、 $\vartheta(x) = O(x)$ である。

証明）　$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \quad \cdots \quad \binom{2n}{n} + \quad \cdots \quad + \binom{2n}{2n} \geq \binom{2n}{n}$

ここで、 $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \in \mathbb{N}$ より、$n < p \leq 2n$ を満たすすべての素数 p は $\binom{2n}{n}$ を割り切る。よって、 $2^{2n} \geq \prod_{n<p\leq 2n} p$ が成り立つ。

また、 $\sum_{n<p\leq 2n} \log p = \log \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \log 2^{2n} = 2n \log 2$

$x = 2^m$ とするとき、

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq 2^m} \log p = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{2^{j-1}<p\leq 2^j} \log p \right) < \sum_{j=1}^{m} 2^j \log 2 = \frac{2(2^m-1)}{2-1} \log 2 < 2^{m+1} \log 2$$

任意の $x > 0$ について、$2^{m-1} \leq x < 2^m$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する。

また、 $x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad \vartheta(x_1) \leq \vartheta(x_2)$

従って、 $\vartheta(x) \leq \vartheta(2^m) < 2^{m+1} \log 2 = 2^2 \cdot 2^{m-1} \log 2 < 4x \log 2$

ゆえに、 $k = 4 \log 2$ とおいて、 $\vartheta(x) < kx$ とできる。　（証明終わり）

5　$\zeta(s)$ が $Re(s) \geq 1$ に零点を持たないことについて

命題 5.1

$\Phi(s) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^s}$ は　$Re(s) > 1$ で収束する。

証明）　$y = \log x$ の点 $(1, 0)$ における接線は、 $y = x - 1$ であり、$y = \log x$ のグラフは $x > 0$ において常に上に凸であることから $\log x \leq x - 1$ であることがわかる。さらに簡単にして、 $x > 0$ において $\log x < x$ が成り立つ。

$Re(s) = 1 + 2\delta \quad (\delta > 0)$ とすると、$\log x^{\delta} < x^{\delta}$ より、$\delta \log x < x^{\delta}, \quad \log x < \frac{1}{\delta} x^{\delta}$

$$\left|\frac{\log p}{p^s}\right| < \frac{\frac{1}{\delta}p^{\delta}}{p^{1+2\delta}} = \frac{1}{\delta}\frac{1}{p^{1+\delta}}$$

従って、

$$\left|\sum_p \frac{\log p}{p^s}\right| \leq \sum_p \left|\frac{\log p}{p^s}\right| < \frac{1}{\delta}\sum_p \frac{1}{p^{1+\delta}} < \frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$$

最後の無限級数は $\delta > 0$ の時収束する。ゆえに $\Phi(s)$ は $Re(s) > 1$ のとき収束する。
（証明終わり）

補題 5.2

$f(s)$ は領域 D における有理型関数であるとする。
また、 $s_0 \in D$ の近傍で $f(s) = (s-s_0)^k f_1(s), \quad (k \in \mathbb{Z}, \quad f_1(s_0) \neq 0)$ 　とする。

- $k = 0$ のとき
  $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$ は $s = s_0$ で正則である。
- $k \neq 0$ のとき
  $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$ は $s = s_0$ で *1* 位の極をもち、その留数は k である。

証明）　$f'(s) = k(s-s_0)^{k-1}f_1(s) + (s-s_0)^k f_1'(s)$ より、$\dfrac{f'(s)}{f(s)} = \dfrac{k}{s-s_0} + \dfrac{f_1'(s)}{f_1(s)}$ で、
$\dfrac{f_1'(s)}{f_1(s)}$ は $s = s_0$ の近傍で正則であるから補題の主張が成立する。　（証明終わり）

定理 5.3 （*Schwarz* の鏡像の原理）

複素平面内の領域 D は、実軸上の線分を含み、実軸に関して対称であるとする。また、関数 $f(z)$ は領域 D で正則であり、 D に含まれる実軸上では実数値をとるとする。このとき、 D において、 $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ が成り立つ。

証明）　$z = x + iy, \quad f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ と実部、虚部の関数で表すとき、 $f(z)$ が正則である必要十分条件は、Cauchy-Riemann の方程式、

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

が成り立つことである。

$F(z) = \overline{f(\overline{z})} = P(x, -y) - iQ(x, -y) = P_1(x, y) + iQ_1(x, y)$ とする。

$\dfrac{\partial}{\partial x}P_1(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}P(x, -y) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, -y), \qquad \dfrac{\partial}{\partial y}Q_1(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\{-Q(x, -y)\} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, -y)$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ より、$\dfrac{\partial P_1}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial Q_1}{\partial y}(x, y)$ が成り立つ。

同様な計算で、$\dfrac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y)$ が成り立つことを示すことができる。

従って、 $F(z)$ は領域 D における正則関数である。さらに、 D に含まれる実軸上の点においては,$f(z)$ が実数値をとること、および $\overline{z} = z$ であることから、 D の実軸上にお

いては $F(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{f(z)} = f(z)$ が成り立つ。このとき、一致の定理により、 D 全体で $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ が成り立つ。すなわち、定理が成り立つ。(証明終わり)

定理 5.4

$\zeta(s)$ は $Re(s) \geq 1$ に零点をもたない。また、 $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ で正則になる。

証明) Euler 積 $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-1}\right)^{-1}$ より、 $\zeta(s)$ は $Re(s) > 1$ に零点をもたない。従って、直線 $Re(s) = 1$ 上に零点がないことを示せばよい。

$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - p^{-s}\right)$

両辺を s で微分して、$\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \dfrac{-p^{-s} \log p \times (-1)}{1 - p^{-s}} = -\sum_p \dfrac{\log p}{p^s - 1}$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s} + \sum_p \left(\frac{1}{p^s - 1} - \frac{1}{p^s}\right) \log p = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}$ のとき、

$\dfrac{1}{p^x(p^x-1)} = \dfrac{1}{p^{2x}} \cdot \dfrac{p^x}{p^x - 1} = \dfrac{1}{p^{2x}} \cdot \left(\dfrac{1}{p^x - 1} + 1\right) < \dfrac{1}{p^{2x}} \cdot \left(\dfrac{1}{2^x - 1} + 1\right)$

よって、

$$\left|\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}\right| < \sum_p \frac{\log p}{p^{2Re(s)}} \left(\frac{1}{2^{Re(s)} - 1} + 1\right)$$

$Re(s) > \dfrac{1}{2}$ のとき、

- $\dfrac{1}{2^{Re(s)} - 1} + 1 < \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}} - 1} + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} + 1 = \sqrt{2} + 2$
- $\sum_p \dfrac{\log p}{p^{2Re(s)}}$ は収束する。

従って、$\sum_p \dfrac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$ は $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ のとき絶対収束して、 s の正則関数となる。

上記の計算によると、$\Phi(s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_p \dfrac{\log p}{p^s(p^s - 1)} \quad \cdots \quad (1)$ である。

ゆえに、 $\Phi(s)$ は $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ で有理型関数であり、その極は $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ に起因する。

補題 5.2 により、 $\zeta(s)$ の極および零点が $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ の極を引き起こす。

- $\zeta(s)$ は $s = 1$ に 1 位の極を持つので、 $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ は $s = 1$ で 1 位の極を持ち、その留数は 1 である。

- もし $\zeta(s)$ が零点を持てば、$-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ はその点で極を持ち、その留数は、$\zeta(s)$ の零点の重複度 $\times(-1)$ である。

領域 D を $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ とする。領域 D は実軸の $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ の部分を含み、実軸に関して対称である。

$f(s) = (s-1)\zeta(s)$ とすると、$f(s)$ は領域 D において正則な関数であり、領域 D の実軸上では実数値をとる。従って、Schwarz の鏡像の原理を適用することができる。

$\zeta(s)$ が $s = 1+it \quad (t>0)$ に μ 位の零点を持つとする。ただし、 $\mu \geq 0$ とする。（ $\mu = 0$ のときは零点ではないことを意味する。また、 $\mu < 0$ の時は極を意味するものとするが、$\zeta(s)$ は $Re(s) > 0$ において $s = 1$ 以外の極をもたないので、 $\mu \geq 0$ である。）

さらに、 $s = 1+2it$ において、 ν 位の零点を持つとする。

Schwarz の鏡像の原理により、 $s = 1-it$ において μ 位、 $s = 1-2it$ において ν 位の零点をもつ。

$\Phi(s)$ の $s = 1$ および $s = 1 \pm it,\ 1 \pm 2it$ における留数について考える。

- $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\Phi(1+\epsilon) = 1$
- $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\Phi(1+\epsilon+it) = -\mu$
- $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\Phi(1+\epsilon+2it) = -\nu$

であるから

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\Phi(1+\epsilon+irt) = \binom{4}{0}(-\nu)+\binom{4}{1}(-\mu)+\binom{4}{2}\cdot 1+\binom{4}{3}(-\mu)+\binom{4}{4}(-\nu)$$

$$= 6-2\nu-8\mu \qquad \cdots \qquad (3)$$

一方、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\Phi(1+\epsilon+irt) = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\epsilon+irt}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p}\frac{\epsilon\log p}{p^{1+\epsilon}}\left\{\binom{4}{0}p^{-2it}+\binom{4}{1}p^{-it}+\binom{4}{2}\cdot 1+\binom{4}{3}p^{it}+\binom{4}{4}p^{2it}\right\}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p}\frac{\epsilon\log p}{p^{1+\epsilon}}\left(p^{\frac{it}{2}}+p^{-\frac{it}{2}}\right)^4 = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p}\frac{\epsilon\log p}{p^{1+\epsilon}}\left\{2Re(p^{\frac{it}{2}})\right\}^4 \geq 0 \qquad \cdots \qquad (4)$$

(3),(4) より、$6-2\nu-8\mu \geq 0$ となるが、$\mu \geq 0$ であったから、この不等式が成り立つには $\mu = 0$ とならなければならない。すなわち、 $\zeta(s) = 0$ は $s = 1+it$ の形の零点を持つことはない。

従って、$-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \displaystyle\sum_{p}\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$ は $s = 1$ に 1 位の極を持ち、その留数が 1 である以外、 $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ において正則である。ゆえに、 $\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は $Re(s) > \dfrac{1}{2}$ において正則である。　（証明終わり）

注意. この定理は Hadamard および de la Vallée Poussin の 1896 年の論文で証明されている。しかしながら、その証明はいずれも長く難しいものであった。その後、上記のようなエレガントなものに洗練されていった。

6 Karamata-Ingham の定理について

定理 6.1 (*Karamata-Ingham*)
$f(t)$ は $t \geq 0$ で有界かつ局所可積分（任意の有限区間で積分可能）な関数で、さらに、*Laplace* 変換

$$G(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

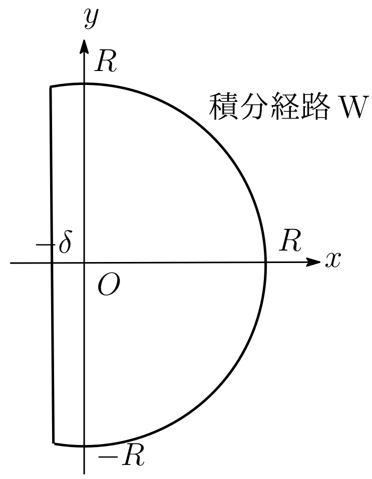
が $Re(z) > 0$ で正則な関数となるものとする。
もし、 $G(z)$ が虚軸 $Re(z) = 0$ の各点の近傍まで正則に拡張できるとすると、広義積分

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

が存在し、その値は、 $G(z)$ を $z = 0$ まで正則に拡張した関数の $z = 0$ における値（それを $G(0)$ と表す）に等しい。

証明） Newman のアイディアを踏まえた証明を Korevaar の文献に従って述べる。
$f(z)$ は有界であるので、その最大値で $f(z)$ を割ったものを考えることにより、$|f(z)| \leq 1$ であるとしてよい。
$0 < \lambda < \infty$ に対して、 $G_\lambda(z) := \displaystyle\int_0^\lambda f(t)e^{-zt}dt$ と定義する。
$G_\lambda(z)$ は $z \in \mathbb{C}$ 全体で正則な関数（整関数）である。
定理を証明するには、 $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} G_\lambda(0) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda f(t)dt$ が存在し、それが $G(0)$ に等しいことを示せばよい。

- アイディア その 1
  $G(0)-G_\lambda(0)$ を Cauchy の積分定理を用いて表し、その絶対値を評価することを考える。関数 $\{G(z) - G_\lambda(z)\}\dfrac{1}{z}$ は、 $z = 0$ に 1 位の極を持ち、その留数が $G(0) - G_\lambda(0)$ となる。それ以外では正則な関数となる。従って、 $z = 0$ を含む領域の境界線となる経路で積分すると Cauchy の積分定理によって $G(0) - G_\lambda(0)$ を計算できる。ただし、「 $G(z)$ は虚軸 $Re(z) = 0$ の各点の近傍まで正則に拡張できる」という条件なので、原点を中心とした円を経路に用いると、 $Re(z) < 0$ の虚軸から離れた部分で正則性を担保することができない。では、 どのような積分経路を用いるとよいか？



任意の $R > 0$ が与えられたとき、$^{\exists}\delta > 0 \quad s.t. \quad |Z| \leq R$ かつ $Re(z) \geq -\delta$ において $G(z)$ は正則であるとできる。

従って、積分経路 W を 「円の一部 $|z| = R$ かつ $Re(Z) \geq -\delta$」および、「線分 $Re(z) = -\delta$ かつ $|z| \leq R$」を合わせたものとするとよい。ただし、経路を半時計周りに進むものとする。
以降、積分経路はすべて半時計周りとする。

$Re(z) > 0$ のとき

$$|G(z) - G_\lambda(z)| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt - \int_0^\lambda f(t)e^{-zt}dt \right| = \left| \int_\lambda^\infty f(t)e^{-zt}dt \right|$$

$|f(t)| \leq 1$ より

$$\leq 1 \times \int_\lambda^\infty e^{-Re(z)t}dt = \left[-\frac{1}{Re(z)} e^{-Re(z)t} \right]_\lambda^\infty = \frac{1}{Re(z)} e^{-Re(z)\lambda} \qquad \cdots \quad ①$$

$Re(z) < 0$ のとき

$$|G_\lambda(z)| = \left| \int_0^\lambda f(t)e^{-Re(z)t}dt \right| \leq 1 \times \int_0^\lambda e^{-Re(z)t}dt$$

$$= \left[-\frac{1}{Re(z)} e^{-Re(z)t} \right]_0^\lambda = -\frac{1}{Re(z)} \left\{ e^{-Re(z)\lambda} - 1 \right\} < \frac{1}{|Re(z)|} e^{-Re(z)\lambda} \qquad \cdots \quad ②$$

- アイディア　その 2
  ①,② の計算では、 $e^{-Re(z)\lambda}$ が出てくる。

  これをなくすために、被積分関数を $\{G(z) - G_\lambda(z)\} \dfrac{e^{\lambda z}}{z}$ に取り替える。

  $\lim_{z \to 0} \{G(z) - G_\lambda(z)\} e^{\lambda z} = G(0) - G_\lambda(0)$ より、$Re(z) > 0$ のとき

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \{G(z) - G_\lambda(z)\} \frac{e^{\lambda z}}{z} dz$$

$$\left| \{G(0) - G_\lambda(0)\} e^{\lambda z} \right| = |\{G(0) - G_\lambda(0)\}| \cdot \left| e^{\lambda z} \right| \leq \frac{1}{Re(z)} e^{-Re(z)\lambda} \cdot e^{Re(z)\lambda} = \frac{1}{Re(z)}$$

- アイディア　その３
さらに $\dfrac{1}{Re(z)}$ をなくすことができないか？

$|z| = R$ のとき、$z\overline{z} = R^2$ より、$Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{z+\frac{R^2}{z}}{2} = \dfrac{R^2}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{R^2}\right)$

ゆえに、被積分関数を $\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,\dfrac{e^{\lambda z}}{z}$ に代えて、$\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{R^2}\right)$ とする。

$\displaystyle\lim_{z\to 0}\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right) = G(0)-G_\lambda(0)$ であるから、

$$G(0)-G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_W \{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dt$$

積分経路 W のうち $Re(z)\geq 0$ の部分を W^+、$Re(z)\leq 0$ の部分を W^- とする。絶対値の評価をうまく行えるように、２つの部分に分けて考えるのである。

まず、 W^+ での積分について考える。$Re(z)>0$ かつ $|z|=R$ のとき、

$$\left|\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\right| = \left|\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\right|\cdot\left|\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{Re(z)}\cdot\frac{2Re(z)}{R^2} = \frac{2}{R^2}$$

すなわち、

$$\left|\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\right| \leq \frac{1}{Re(z)}\cdot\frac{2Re(z)}{R^2} = \frac{2}{R^2}$$

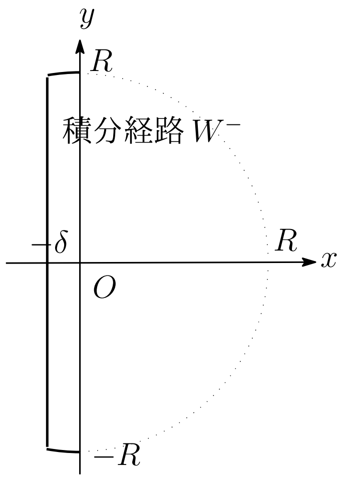
であるが、この不等式は $|z|=R$ かつ $Re(z)=0$ のときも成り立つ。ゆえに、

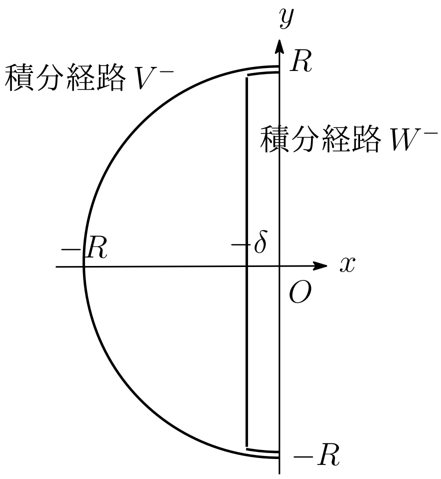
$$\frac{1}{2\pi}\int_{W^+}\left|\{G(z)-G_\lambda(z)\}\,e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\right|dt \leq \frac{1}{2\pi}\times\frac{2}{R^2}\times\pi R = \frac{1}{R}$$

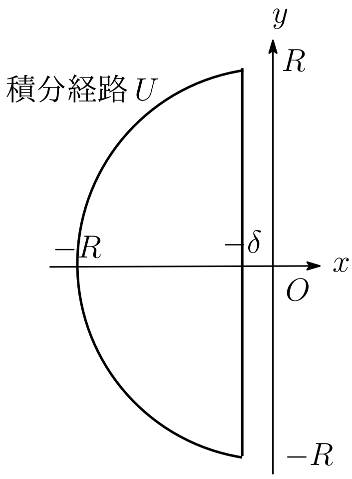
これで W^+ における積分の評価ができた。

- アイディア　その４
W^- の積分については、さらに２つに分けて考える

(1) $G_\lambda(z)$ の積分について記述を簡単にするため、
$H_\lambda(z) = G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{R^2}\right)$
とおく。$G_\lambda(z)$ は複素平面全体で正則であるから、$H_\lambda(z)$ は $z=0$ 以外の複素平面全体で正則である。従って、積分経路を虚軸に近いところに限定する必要はない。そこで、積分経路を 「$|z|=R$ かつ $Re(z)\leq 0$」 に置き換えて、評価をうまく行うことを考える。







積分経路 $V^- = \{z \mid \ |z| = R$ かつ $Re(z) \leq 0\}$ とする。積分経路 V^- から W^- を差し引いた積分経路を U とおくと、U は、「$|Z| = R$ かつ $Re(z) \leq -\delta$」および「$Re(z) = -\delta$ かつ $|z| \leq R$」を合わせたものである。U で囲まれた領域において $H_\lambda(z)$ は正則なので、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{V^-} H_\lambda(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{W^-} H_\lambda(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_U H_\lambda(z)dz = 0$$

ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W^-} H_\lambda(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{V^-} H_\lambda(z)dz$$

ここで $|f(z)| \leq 1$ と仮定したことを踏まえ、$Re(z) < 0$ のとき、

$$|G_\lambda(z)| = \left|\int_0^\lambda f(t)e^{-zt}dt\right| \leq \int_0^\lambda e^{-Re(z)t}dt = \left[-\frac{1}{Re(z)}e^{-Re(z)t}\right]_0^\lambda$$

$$= -\frac{1}{Re(z)}\left(e^{-Re(z)\lambda} - 1\right) < \frac{1}{|Re(z)|}e^{-Re(z)\lambda}$$

($Re(z) < 0$ より $-Re(z) = |Re(z)|$ であることに注意。)

$$\left|e^{\lambda z}\right| = e^{Re(z)\lambda}$$

$|z| = R$ のとき、$z\overline{z} = R^2$ より、

$$\left|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{R^2} + \frac{z}{R^2}\right| = \frac{2}{R^2}|Re(z)|$$

以上より、積分経路 V^- において

$$|H_\lambda(z)| < \frac{1}{|Re(z)|}e^{-Re(z)\lambda} \times e^{Re(z)\lambda} \times \frac{2}{R^2}|Re(z)| = \frac{2}{R^2}$$

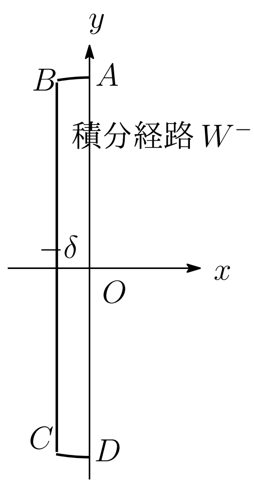
従って、

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W^-} H_\lambda(z)dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{V^-} H_\lambda(z)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \times \frac{2}{R^2} \times \pi R = \frac{1}{R}$$

(2) $G(z)$ の積分について

まず、コンパクト集合 W^- における
$\left|G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)\right|$
の最大値を M とする。このとき、M は λ によらない。

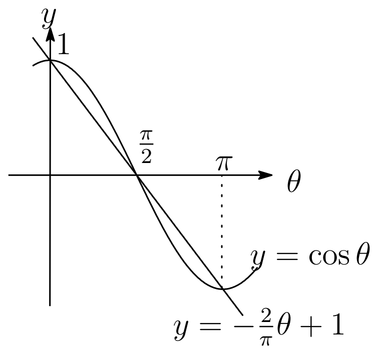
次に、積分経路 W^- を円弧 $A \to B$、線分 $B \to C$ 、円弧 $C \to D$ の 3 箇所に分けて考える。



◇ $A \to B$ について
$z = Re^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha\right)$ とできる。
ただし、 α は $\cos\alpha = -\delta, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ を満たす角である。

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{A\to B} G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} Me^{\lambda Re(z)}|Re^{i\theta}|d\theta$$

$$= \frac{MR}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} e^{\lambda\cos\theta}d\theta \quad \cdots \quad ①$$



$\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき、

$\cos\theta \leq -\dfrac{2}{\pi}\theta + 1$ であるから

$$① \leq \frac{MR}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} e^{\lambda R\left(-\frac{2}{\pi}\theta+1\right)} d\theta$$

$$= \frac{MR}{2\pi}\left[-\frac{\pi}{2\lambda R}e^{\lambda R\left(-\frac{2}{\pi}\theta+1\right)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}$$

$$= -\frac{M}{4\lambda}\left(e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\alpha+1\right)} - 1\right) < \frac{M}{4\lambda}$$

ゆえに

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{A\to B} G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| < \frac{M}{4\lambda}$$

◇ $B \to C$ について

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{A\to B} G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \times Me^{-\lambda\delta} \times 2R = \frac{MRe^{-\lambda\delta}}{\pi}$$

◇ $C \to D$ について
$A \to B$ と同様に、

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C\to D} G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| < \frac{M}{4\lambda}$$

以上から、$A \to B,\ B \to C,\ C \to D$ を合わせて W^- における積分に関する評価は以下のとおりになる。

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W^-} G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz\right| < \frac{M}{4\lambda} + \frac{MRe^{-\lambda\delta}}{\pi} + \frac{M}{4\lambda} = \frac{M}{2\lambda} + \frac{MRe^{-\lambda\delta}}{\pi}$$

W^+ と W^- における積分の評価を合わせて W における積分の評価は以下のとおりになる。

$$|G(0) - G_\lambda(0)| \leq \frac{2}{R} + \frac{M}{2\lambda} + \frac{MRe^{-\lambda\delta}}{\pi}$$

よって、

$$\limsup_{\lambda\to\infty} |G(0) - G_\lambda(0)| \leq \frac{2}{R}$$

R は任意の正の実数であったから、

$$\lim_{\lambda\to\infty} |G(0) - G_\lambda(0)| = 0$$

が成り立つ。これにより、定理の主張が示された。　（証明終わり）

この定理について、このレポートでは、「Karamata-Ingham」としたが、他にいくつかの呼び名がある。

- Zagier の 1997 年の文献「Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem」では、この定理は「Analytic Thorem」となっている。D.Pagonakis と E.Taratoris の「An Elementary Approach on Newman's Proof of the Prime Number Theorem」も「Analytic Thorem」としている。中川　仁先生の 2010 年度の講義録「リーマンのゼータ関数と素数分布」では「解析的定理」となっているが、これは「Analytic Thorem」を訳したものではないだろうか。
- J. Korevaar の「On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem」では、「Auxiliary Tauber Theorem」となっている。「Tauber の補助定理」という意味なのか？
- O. Riemenshneider の「Simple proofs of some versions of the abstract Prime Number Theorem」（2007 年）では、「Karamata-Ingham」としている。この文献ではこの定理の証明にかかわる経緯について、次のように述べている。『Ingham は「On Wiener's method in Tauberian Theorems」（1935 年）において、Wiener Theory を用いてこの定理を証明した。・・・Newman による breakthrough は、Cauchy の積分定理までの範囲で、巧妙に絶対値の評価を行うことによって、Ingham が行ったこの定理の難しい証明をわかりやすいものに置き換えたことにある。』
- Newman は「Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem」（1980 年）において、『これまで使われてきた経路積分

  $$\int_C f(z)N^n \frac{1}{z} dz$$

  に代えて経路積分

  $$\int_\Gamma f(z)N^n \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz$$

  を使ったことに我々の novelty がある。』と述べている。
  被積分関数のところで、最後にかける $\frac{1}{z}$ を $\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)$ に代える動機について、このレポートでは Korevaar の文献に従って、上記証明の「アイディア　その１」〜「アイディア　その４」のように記述してみた。

7　$\vartheta(x) \sim x$ について

定理 7.1 $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ について、広義積分 $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$ は収束する。

証明）　まず、$\Phi(z)$ と $\vartheta(x)$ の関係について考察する。

$$\vartheta(n) - \vartheta(n-1) = \sum_{n-1 < p \le n} \log p = \begin{cases} \log p & (n \text{ が素数 } p \text{ のとき}) \\ 0 & (n \text{ が素数ではないとき}) \end{cases}$$

従って、$Re(z) > 1$ のとき

$$\Phi(z) = \sum_p \frac{\log p}{p^z} = \sum_{n=2}^\infty \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n^z} = \sum_{n=1}^\infty \vartheta(n) \left\{ \frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \vartheta(n) \int_n^{n+1} \frac{z}{x^{z+1}} dx$$

ここで、 $n \le x < n+1$ のとき、 $\vartheta(x) = \vartheta(n)$ であるから

$$= \sum_{n=1}^\infty z \int_n^{n+1} \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} dx = z \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} dx$$

$x = e^t$ とおくと、 $dx = e^t dt,$
$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & \infty \\ \hline t & 0 & \to & \infty \end{array}$$

$$= z \int_0^\infty \vartheta(e^t) \frac{e^t dt}{e^(z+1)t} = z \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-zt} dt$$

整理すると

$$\Phi(z) = z \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-zt} dt \quad \cdots \quad ②$$

となる。

次に、定理の積分について考える。

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\vartheta(e^t) - e^t}{e^{2t}} e^t dt = \int_0^\infty \left\{ \vartheta(e^t) e^{-t} - 1 \right\} dt$$

従って、 $f(t) = \vartheta(e^t) e^{-t} - 1$ とおいて、広義積分 $\int_0^\infty f(t) dt$ が存在することを示せばよい。Karamata-Ingham の定理 6.1 に結び付ける。

$\vartheta(x) = O(x)$ であるから、 $f(t) = \vartheta(e^t) e^{-t} - 1$ は $t \ge 0$ において有界かつ局所可積分である。

また、

$$G(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

と定義すると

$$G(z)=\int_0^\infty \left\{\vartheta(e^t)e^{-t}-1\right\}e^{-zt}dt=\int_0^\infty \vartheta(e^t)e^{-(z+1)t}dt-\int_0^\infty e^{-zt}dt$$

② より

$$G(z)=\frac{1}{z+1}\Phi(z+1)-\left[-\frac{1}{z}e^{-zt}\right]_0^\infty=\frac{1}{z+1}\Phi(z+1)-\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{z+1}\left\{\left(\phi(z+1)-\frac{1}{z}\right)-1\right\}$$

定理 5.4 より $\Phi(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は $Re(s)>\dfrac{1}{2}$ において正則だといえているので、 $s=z+1$ として $\Phi(z+1)-\dfrac{1}{z}$ は,$Re(z)>-\dfrac{1}{2}$ で正則である。ゆえに、$G(z)$ は定理 6.1（Karamata-Ingham）の仮定「$G(z)$ が $Re(z)\geq 0$ で正則である」を満たしている。

従って、定理 6.1 （Karamata-Ingham）より、

広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ が存在して、その値は $G(0)$ に等しい。　（証明終わり）

定理 7.2　$\vartheta(x)\sim x$ である。

証明）　$\vartheta(x)$ については、 $x_1<x_2 \quad \Longrightarrow \vartheta(x_1)\leq\vartheta(x_2)$ が成り立っている。

背理法で定理を証明する。

もし、 $\vartheta(x)\sim x$ ではないと仮定すると、 $\exists N>0,\quad {}^\exists\epsilon>0$　s.t.　for ${}^\forall x$ について

(i) $\vartheta(x)\geq(1+\epsilon)x$

(ii) $\vartheta(x)\leq(1-\epsilon)x$

のいずれかが成り立つ。

(i) の場合、$x>N$ のとき、

$$\int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{\vartheta(u)-u}{u^2}du\geq\int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{(1+\epsilon)x-u}{u^2}du=\left[-\frac{(1+\epsilon)x}{u}-\log u\right]_x^{(1+\epsilon)x}$$

$$=\left\{-\frac{(1+\epsilon)x}{(1+\epsilon)x}+\frac{(1+\epsilon)x}{x}\right\}-\log\frac{(1+\epsilon)x}{x}=-1+(1+\epsilon)-\log(1+\epsilon)$$

$$=\epsilon-\log(1+\epsilon)$$

$\epsilon-\log(1+\epsilon)=C$ （定数）と置くと、$\displaystyle\int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{\vartheta(u)-u}{u^2}du\geq C\quad({}^\forall x>N)$ となる。

これは、広義積分 $\displaystyle\int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{\vartheta(u)-u}{u^2}du$ が収束することに反する。

(ii) の場合も同様である。以上から、$\vartheta(x)\sim x$ が成り立たないとすると矛盾が生じる。従って、定理は成り立つ。　（証明終わり）

8　素数定理の証明

定理 8.1　素数定理が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$\vartheta(x) \sim x$

証明）　$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ の右辺の和の項数は $\pi(x)$ で、各項大きさは $\log x$ 以下であるから、$0 \le \vartheta(x) \le \pi(x) \log x$ が成り立つ。

(例　$\vartheta(10) = \sum_{p \le 10} \log p = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 \le 4 \log 10 = \pi(10) \log 10$ ）

従って、$\dfrac{\vartheta(x)}{x} \le \pi(x) \dfrac{\log x}{x}$　$\cdots$　①

任意の $\epsilon > 0$ について、区間 $[x^{1-\epsilon}\ ,\ x]$ に存在する素数は区間 $[0\ ,\ x]$ に存在する素数より少ないので、$\vartheta(x) \ge \sum_{x^{1-\epsilon} < p \le x} \log p$ である。

$x^{1-\epsilon} < p \le x$ のとき、$\log p > \log x^{1-\epsilon} = (1-\epsilon) \log x$

また、$x^{1-\epsilon} < p \le x$ を満たす素数の個数は $\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})$ である。

ゆえに、$\vartheta(x) \le \left\{ \pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon}) \right\} (1-\epsilon) \log x$　　$\dfrac{\vartheta(x)}{(1-\epsilon)\log x} \ge \pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})$

$\pi(x) \le \dfrac{\vartheta(x)}{(1-\epsilon)\log x} + \pi(x^{1-\epsilon}) \le \dfrac{\vartheta(x)}{(1-\epsilon)\log x} + x^{1-\epsilon}$　$\cdots$　②

①、② より、

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \le \pi(x) \frac{\log x}{x} \le \left\{ \frac{\vartheta(x)}{(1-\epsilon)\log x} + x^{1-\epsilon} \right\} \frac{\log x}{x}$$

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \le \pi(x) \frac{\log x}{x} \le \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\epsilon}}$$

任意の $\epsilon > 0$ について、$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^{\epsilon}} = 0$ であるから、

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

（証明終わり）

定理 7.2 及び定理 8.1 により、素数定理は証明された。

終わりに

ふとした雑談をきっかけに「素数の音楽」を読み、さらに素数定理の証明にまつわる経緯を学ぶことができた。そして、Newman のアイディアを踏まえた証明について調べて、自分なりにまとめることができたことはうれしいことであった。

参考文献

[1] J. Newman「Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem」The American Mathematical Monthly Vol 87, pp.693-696, 1980

[2] D. Zagier「Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem」 The Americam Mathematical Monthly Vol 104, No.8, pp.705-708, October 1997
流れが書いてあるだけで、自分でギャップを埋めなければいけない。

[3] J. Korevaar「On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem 」 Mathematisch Institut Universiteit van Amsterdam, 2nd Edition, 2001

[4] D. Pagonakis and E. Taratoris「An Elementary Approach on Newman's Proof of the Number Theorem」 Principia:The Princeton Undergraduate Mathematics Journal 2015 pp.40-50
この文献は、誤植やミス、飛躍などがそこそこあることに留意し、他の文献と比較しながら読まなければいけない。

[5] 中川　仁「リーマンのゼータ関数と素数分布について」　2010 年度前期　代数学特論（講義録）
リーマンのゼータ関数、ガンマ関数、関数等式などから順に解説が進み、最後に素数定理の証明に至る。他の文献で証明等が分かりにくい部分について、この文献の解説を読んで理解できたところがあり、助かった。（ネット上で閲覧できる）

[6] O. Riemenschneider 「Simple analytic proofs of some versions of the abstract Prime Number Theorem」 Advanced Studies in Pure Mathematics 56,2009 Singularities - Niigata-Toyama 2007 pp. 249-283

[7] P. T. Bateman and H. G. Diamond 「A Hundred Years of Prime Numbers」 The Americam Mathematical Monthly Vol 103, No9, pp.729-741, Noember 1996
素数定理の証明の歴史がわかりやすく解説されている。