# $x^2+y^2=z^2, \quad x^4+y^4=z^4$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ について

2021 年 11 月　数学ゼミの課題
片山　喜美

## I. $x^2+y^2=z^2$ について

$x^2+y^2=z^2$　$x,y,z$ は自然数、$x,y,z$ の最大公約数 $gcd(x,y,z)=1$ とする。

問 1　$x,y$ の一方は奇数、他方は偶数であり、 $z$ は奇数であることを示せ。

問 2　$x,z$ が奇数、 $y$ が偶数であるとき、互いに素な自然数 $a,b$ があって、
$x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ z=a^2+b^2$ となることを、以下に従って証明せよ。

(1)　$z+x=2k,\ z-x=2l,\quad k,\ l$ は自然数で, $gcd(k,l)=1$ であることを示せ。

(2)　$k=a^2,\ l=b^2$ を満たす自然数 $a,b$ が存在し、 $x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ z=a^2+b^2$ とできることを示せ。 このとき、$a,b$ の一方は偶数で他方は奇数であることを示せ。

**課題**　$a,\ b$ にいろいろな値を入れて、$x^2+y^2=z^2$ を満たす自然数の組 $(x,y,z)$ をいろいろ作ってみよ。

## II. $x^4+y^4=z^4$ について

前節の $x^2+y^2=z^2$ で得られた結果を用いて、そのような自然数 $x,\ y,\ z$ が存在しないことを証明する。

ただし、$z$ は 4 乗ではなく、2 乗として、 $x^4+y^4=z^2$ を満たすような自然数 $x,\ y,\ z$ の組がないことを示すことにする。 $z^2$ でさえ不可能であれば、 $z^4$ で可能になることはない。

以下に答えよ。

問 1　前節と同様に、 $x$ が奇数で、 $y$ が偶数、 $z$ が奇数であるとしてよい。
　$(x^2)^2+(y^2)^2=z^2$ であると考えると、前節で得られた結果から、$x^2=a^2-b^2,\ y^2=2ab.\ z=a^2+b^2$ を満たす互いに素な自然数 $a,\ b$ が存在する。このとき、$a$ が奇数、$b$ が偶数であることを示せ。

問 2　$a=c^2,\ b_1=d^2$ を満たす自然数 $c,\ d$ があることを示せ。

問 3　$x^2+b^2=a^2$　と変形できるので、再び前節の結果から、$x=e^2-f^2,\ b=2ef,\ a=e^2+f^2$ を満たす互いに素な自然数 $e,\ f$ が存在する。このとき、 $e=g^2,\ f=h^2$ を満たす互いに素な自然数 $g,\ h$ が存在することを示せ。

問 4　$a=e^2+f^2$ に前問の結果を代入すると、 $c^2=g^4+h^4$ となる。このことをもとに、$x^4+y^4=z^2$ を満たす自然数の組 $x,\ y,\ z$ は存在しないことを示せ。

以上は、「$x^n+y^n=z^n\quad(n\geqq 3)$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ は存在しない」というフェルマーの大定理の $n=4$ のときのフェルマーによる証明である。その方法は、ある自然数の組がこの方程式をみたすとすると、もっと小さい自然数でこの式を満たすものが存在することを述べるもので、「無限降下法」と呼ばれている。

＜解答例＞

## I. $x^2+y^2=z^2$ について

問 1　$x^2,\, y^2,\, z^2 \equiv 0,\, 1 \pmod 4$ が成り立つ。

右表より、$z^2+y^2 \equiv z^2 \pmod 4$ が成立するのは、$x^2 \equiv y^2 \equiv 0$ もしくは、$x^2,\, y^2$ のいずれか一方が 0 に合同で、他方は 1 に合同のときである。

| $x^2$ | $y^2$ | $x^2+y^2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |

- $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod 4$ のとき
  このときは、$x,\, y$ とも偶数であるから、$gcd(x,\, y)=1$ に反する。
- $x^2 \equiv 0,\quad y^2 \equiv 1 \pmod 4$ もしくは、$x^2 \equiv 1,\quad y^2 \equiv 0 \pmod 4$ のとき
  $x,\, y$ の一方は奇数で他方は偶数である。

以上により、証明された。

問 2 (1)　$x,\, z$ はともに奇数で、$x<z$ であるから、$z+x,\, z-x$ はともに正の偶数である。よって、$z+x=2k,\, z-x=2l$ となる自然数 $k,\, l$ が存在する。このとき、$gcd(k,\, l)=d$ とすると、$z=k+l,\, x=k-l$ であるから、$d$ は $x,\, y$ の公約数となる。そして、$y^2=z^2-x^2$ は $d^2$ の倍数となるので、$d$ は $y$ の約数である。$gcd(x,\, y,\, z)=1$ であるから、$d=1$ でなければならない。よって、$gcd(k,\, l)=1$ である。（証明終）

(2)　$y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x)=2k\cdot 2l=4kl$
$y$ は偶数であるから、$y=2y_1\quad (y_1$は自然数) とできる。従って、$y_1^2=kl$
(1) より $gcd(k,\, l)=1$ であるから、$k=a^2,\, l=b^2\quad (a,\, b$ は自然数) とできる。（※ $y_1$ の素因数分解を考えればよいだろう）
以上より、$x=k-l=a^2-b^2,\quad y^2=4kl=4a^2b^2$ より、$y=2ab,\quad z=k+l=a^2+b^2$
$gcd(a,\, b)=e$ とすると、上記の関係式から、$x,\, y,\, z$ はすべて $e$ で割り切れる。$gcd(x,\, y,\, z)=1$ より $e=1$ でなければならない。また、$x,\, z$ はともに奇数であることから $a,\, b$ の一方は奇数で他方は偶数でなければいけない。（証明終）

**課題**　例えば、下の表のような数値を得ることができる。表計算ソフトなどで作ってみる、あるいはプログラムを作成して計算してみるとよいだろう。

| $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 5 | 12 | 13 |
| 4 | 1 | 15 | 8 | 17 |
| 4 | 3 | 7 | 24 | 25 |
| 5 | 2 | 21 | 20 | 29 |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

II. $x^4+y^4=z^4$ について

$z$ のところを 4 乗ではなく、 $x^4+y^4=z^2$ として、これを満たす互いに素な自然数 $x, y, z$ が存在しないことを、段階を追って示していく。

問 1 $x^2=a^2-b^2$ において、 $x$ は奇数であるから $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ である。
$a^2-b^2 \equiv \pmod 4$ となるのは、 $a$ が奇数、 $b$ が偶数のときに限られる。(証明終)

問 2 $y^2=2ab$ において、 $y=2y_1, b=2b_1$ ($y_1, b_1$は自然数) とできるから、$4y_1^2=4ab_1$, $y_1^2=ab_1$ 。ここで、前節と同様に $gcd(a, b_1)=1$ を示すことができるので、 $y_1^2=ab_1$ が成り立つとき、 $a=c^2, b_1=d^2$ を満たす自然数 $c, d$ が存在する。(証明終)

問 3 $b=2ef$ より、$b_1=d^2=ef, gcd(e, f)=1$ 。よって、 $e=g^2, f=h^2$ を満たす自然数 $g, h$ が存在する。(証明終)

問 4 これまでの結果から、$g^4+h^4=c^2$ が得られた。このとき、 $c \leqq c^2=a<a^2+b^2=z$ である。
従って、 $x^4+y^4=z^2$ を満たす互いに素な自然数 $x, y, z$ が存在したとすると、$c<z$ を満たす自然数を用いて、 $g^4+h^4=c^2$ を満たす互いに素な自然数 $g, h, c$ が得られる。
すなわち、 $x^4+y^4=z^2$ が 1 つの自然数解をもてば、それを基点として、$z$ の値がどんどん小さくなる自然数解を順に作り出していけることになる。 $z \geqq 1$ であるから、それは不可能である。
よって、$x^4+y^4=z^2$ を満たす自然数 $x, y, z$ は存在しない。(証明終)

以上により、フェルマーの大定理「$x^n+y^n=z^n$ $(n \geqq 3)$ を満たす自然数 $x, y, z$ は存在しない」の $n=4$ の場合が証明された。この方法は、フェルマーによるものである。

## 注意

- この課題プリントは、「無限降下法」を用いた大学入試問題を題材とした授業の際に、余力のある生徒向けに作成したものである。偶然、その授業のあった日の朝日新聞に、『京都大数理解析研究所の望月新一教授らが「宇宙際（うちゅうさい）タイヒミュラー（IUT）理論」を拡張し、解決までに 350 年以上かかった超難問「フェルマーの最終定理」を新たな方法で証明したとする論文が、東京工業大が発行する数学誌「Kodai Math.J.」に掲載されることが分かった」』いう大きな記事が出た。授業から帰ってきたところに、ある先生がその記事を持ってこられた。偶然に驚いた。
- $x^3+y^3=z^3$ については、$x^4+y^4=z^4$ のときよりも、証明が難しくなる。