

ユークリッドの互除法について

2021年9月

片山 喜美

2つの自然数 a, b の最大公約数 d をユークリッドの互除法によって計算する。そして、その計算をもとに一次不定方程式 $ax + by = d$ をみたす整数の組 (x, y) を一つ見つけるシンプルな方法として、以下のような計算方法がある。

例 $a = 247, b = 91$

247	91		a	b	
182	(2		$2b$		(2
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
65	91		$a - 2b$	b	
1)	65		1)	$a - 2b$	
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
65	26		$a - 2b$	$-a + 3b$	
52	(2		$-2a + 6b$		(2
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
13	26		$3a - 8b$		
2)	26				
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
	0				

【計算手順】

- まず、上記左側のように、数値に関するユークリッドの互除法に対応した計算を行う。すると、最大公約数が13であることがわかる。
- 次に、右側に $247 = a, 91 = b$ と書き直して、左側に対応した式計算を受けから順に行っていく。左側の互除法で最大公約数の13が出てくるところまで右側の計算を行う。その結果、 $13 = 3a - 8b$ となる。実際、 $3 \cdot 247 - 8 \cdot 91 = 741 - 728 = 13$ となっている。

以上の計算結果から、 $247x + 91y = 13$ は1つの整数解 $x = 3, y = -8$ を持つ。

例2 $a = 31, b = 228$

31	228		a	b	
7)	217		7)	$7a$	
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
31	11		a	$-7a + b$	
22	(2		$-14a + 2b$		(2
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
9	11		$15a - 2b$	$-7a + b$	
1)	9		1)	$15a - 2b$	
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
9	2		$15a - 2b$	$-22a + 3b$	
8	(4		$-88a + 12b$		(4
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
1			$103a - 14b$		