

パスカルの三角形に現れる数の偶奇について

(シェルピンスキーのガスケット)

2021 年 9 月

片山 喜美

パスカルの三角形は、以下のように構成する。

- (1) 一番上の段を第 0 段とし、そこに 1 を 1 つおく。
- (2) 次の段を第 1 段とし、そこに 1 を 2 つ置く。(第 0 段の 1 の左下と右下)
- (3) 第 n 段までできたら、第 $n + 1$ 段は次の規則で作る。
 - 第 n 段の左端の斜め左下に 1 を置く。
 - 第 n 段の 1 番目と 2 番目の間の下に、第 n 段の 1 番目と 2 番目の和となる数を置く。同様に、2 番目と 3 番目の間、 \dots 、 n 番目と $n + 1$ 番目の間まで続ける。
 - 最後に、第 n 段の右端の斜め右下に 1 を置く。

すると、右のようになる。

上記の操作は、

$${}_nC_0 = 1, {}_nC_n = 1,$$

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_{k-1} + {}_nC_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

に対応しているので、 ${}_0C_0 = 1$ とすること

を含めて、第 n 段に並ぶ数は

$${}_nC_0, {}_nC_1, \dots, {}_nC_n$$

になる。

```

      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
.....

```

ここで、二項係数の偶奇を考え、偶数を 0、奇数を 1 で表したパスカルの三角形を作る。二項係数を計算してから、1 と 0 に変換するのではなく、パスカルの三角形を作るときに、 $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$ というふうに mod 2 の計算で三角形を作っていくのである。

右は、第 0 段から第 14 段まで作ったものである。

```

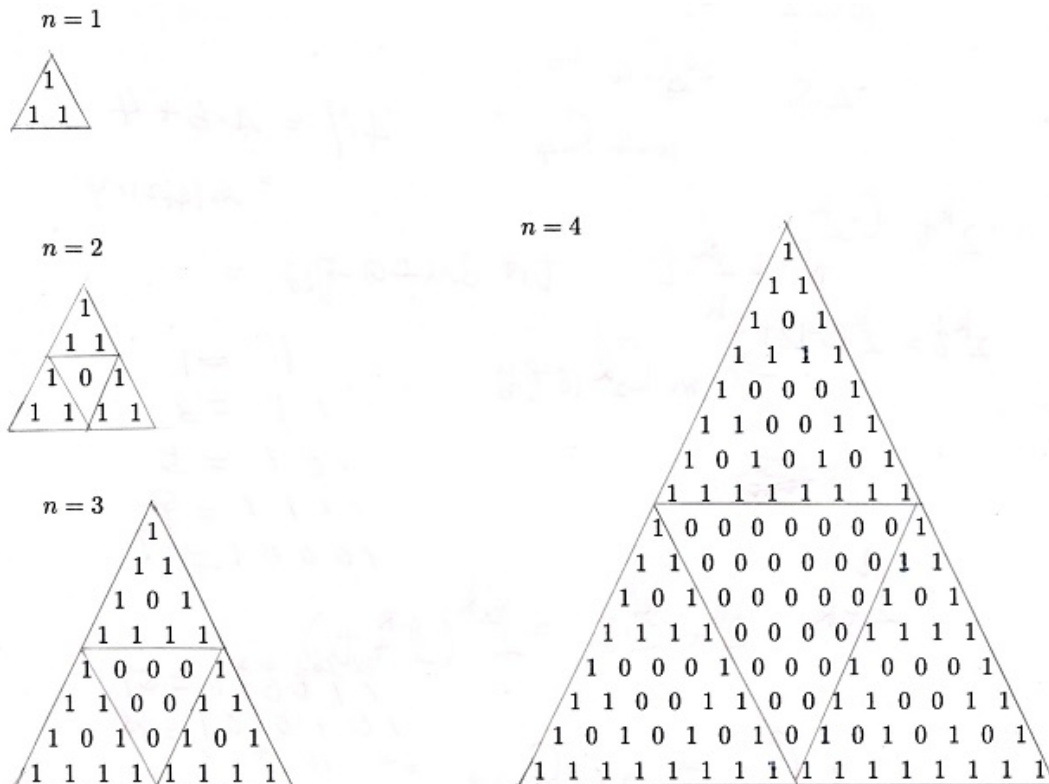
      1
     1 1
    1 0 1
   1 1 1 1
  1 0 0 0 1
 1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0 0 1 0 1
1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1
1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

```

この三角形は、大変きれいな形になっていることがわかる。例えば、

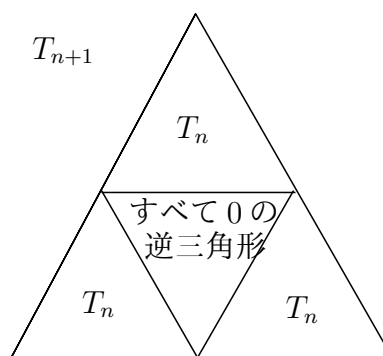
- ・ 第 $2^n - 2$ 段は、1 と 0 が交互に並ぶ。
- ・ 第 $2^n - 1$ 段は、すべて 1 である。
- ・ 第 2^n 段は、両端が 1 である以外はすべて 0 である。

さらに、規則性を捉えるため、第 0 段から第 $2^n - 1$ 段の三角形を考えてみる。



第 0 段から第 $2^n - 1$ 段で作る三角形を T_n とする。

このとき、 T_{n+1} は、すべて 0 を並べた一辺 $2^{n-1} - 1$ の逆三角形の外に 3 つの T_n を並べたものになっている。(右の図参照)



このことは、数学的帰納法で証明することができる。概略は、以下のとおりである。

- (1) T_n まで作り、その最下段である第 $2^n - 1$ 段がすべて 1 であったとする。すると、第 2^n 段は、両端が 1 である以外はすべて 0 である。

- (2) 作り方より、第 $2^n + k$ ($0 \leq k < 2^n$) 段において、左端を 0 番目とする数え方で、第 k 番目から第 2^n 番目の数の並びは $1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0 \ 1$ である。

このことにより、上の T_{n+1} に関する図において、左下で T_n なるとしている部分三角形の右端、および、右下で T_n なるとしている部分三角形の左端に 1 が並ぶことがわかる。

- (3) 左下の部分三角形については、規則から左端に 1 を配置する。(2) で述べたように部分三角形の右端に 1 が来ることとあわせ、その間の値は T_n を作るときと同じ規則で作っていく。従って、左下の部分三角形は T_n になる。同様に、右下の部分三角形も T_n になる。
- (4) 真ん中の逆三角形の部分については、(2) で述べた $1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0 \ 1$ の並びにより 0 が並ぶ逆三角形になる。

以上のことから、 T_{n+1} について、正しいことが言えた。(証明終わり)

このような三角形になることから、二項係数について次のことが言える。

- ${}_{2^n-2}C_{2k}$ は奇数、 ${}_{2^n-2}C_{2k+1}$ は偶数
- ${}_{2^n-1}C_k$ はすべて奇数
- ${}_{2^n}C_k$ ($1 \leq k \leq 2^n - 1$) はすべて偶数
- ${}_{2^n+k}C_k$ ($1 \leq k \leq 2^n - 1$) はすべて奇数

※ 最後の性質は、 T_{n+1} について証明したときに、左下の三角形の右端が 1 であることから言えることである。

関連したことが、東京大学の入試問題に出題されている。

◎東京大学 1999 年前期理系 第 5 問

- (1) k を自然数とする。 m を $m = 2^k$ とおくとき、 $0 < n < m$ を満たすすべての整数 n について、二項係数 ${}_mC_n$ は偶数であることを示せ。
- (2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件： $0 \leq n \leq m$ を満たすすべての整数 n について、二項係数 ${}_mC_n$ は奇数である。

この問題については、パスカルの三角形に現れる数の偶奇によりわかる。ただし、入試問題の解答としては、それにふさわしい方法をとることになる。

◎東京大学 2009 年前期理系 第 1 問

自然数 $m \geq 2$ に対し、 $m - 1$ 個の二項係数

$${}_mC_1, {}_mC_2, \cdots, {}_mC_{m-1}$$

を考え、これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

- (1) m が素数ならば、 $d_m = m$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 k に対し、 $k^m - k$ が d_m で割り切れることを、 k に関する数学的帰納法によって示せ。
- (3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

今回の表題のことを考えたきっかけは、過日、N 君からこの問題の (3) に関連したことを質問された際に、パスカルの三角形現れる数の偶奇について考えてみたことであった。きっと、昔、東京大学の 1999 年の問題を解いてみたことがあり、その当時も考えていたのではないと思う。

m が偶数の中でも、 $m = 2^k$ のときは、パスカルの三角形の考察により、両端の 1 を除いてすべて偶数になるので、 d_m は偶数である。 $d_m = 2$ となることについては、一つには、 ${}_2^k C_1 = 2^k$ であるから、それは 2 のべきでなければならない。一方、二項係数の真ん中のところにある ${}_2^k C_{2^{k-1}}$ については、 ${}_2^k C_{2^{k-1}} = {}_{2^{k-1}-1}^{2^{k-1}-1} C_{2^{k-1}-1} + {}_{2^{k-1}-1}^{2^{k-1}-1} C_{2^{k-1}} = 2 \cdot {}_{2^{k-1}-1}^{2^{k-1}-1} C_{2^{k-1}-1} = 2 \times \text{奇数}$ ($\because 2^{k-1} - 1$ のところはすべて奇数) なので、 d_m は 4 を割り切らない。従って、 $d_m = 2$ になることが示される。

m が 2 のべきでないときには、パスカルの三角形で考えて奇数が混じっているので d_m は奇数だといえる。しかし、簡単にはその奇数が 1 で、 $d_m = 1$ となることを導けないように思われる。(考えが至っていないだけかもしれない)

入試問題で誘導されているように、(2) の $d_m \mid k^m - k$ を用いるか、誘導とは違うが $(1-1)^m$ の二項展開を用いた解答にするかであろう。

入試問題への適切な解答としてどうかとは別に、あれこれ考えているうちに偶奇のなす三角形がきれいな形になっていることに気づき、うれしかった。

なお、この三角形は「シェルピンスキーのガスケット」と呼ばれている図形であることを、その後、ネット検索で知った。