ネイピア数eの連分数展開について

2021 年 8 月

片山　喜美

はじめに

ネイピア数（自然対数の底）は、 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ で定義される数である。

この数は、以下のようなきれいな連分数展開を持つ。

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}$$

$$= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \quad \cdots \quad]$$

※　連分数を記述するスペースを省略するため、それぞれの部分的な分数のところの分子が 1 である場合は、「左端の数」をならべて上記のように書き表すこととする。

このような連分数展開になることは、e の近似値を用いた計算から発見されたのではないかと思う。手元の PC の表計算ソフトで 1!から 20!までを計算し、$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \quad \cdots \quad + \frac{1}{20!}$ を求めてみると、だいたい 2.718281828459 となった。この数値をもとに、表計算ソフトのセルに数式を埋め込んで正則連分数を計算してみると

$$2.718281828459 = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 13, 1, 6, \quad \cdots]$$

となった。12,1,1, の後 13 となり、それから先は規則性が失われていくのは誤差により数値が間違いになるものと考え、

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, \quad \cdots]$$

となるのではないかと予測できる。このような連分数展開をもつ数 e はただものではないと思ってしまう。

さて、どうしたらこのような連分数展開になることを証明することができるのだろうか。今年 (2021 年)、「ディオファントス近似と大学入試問題」について調べる機会があり、その際に久しぶりに連分数について復習した。さらに、 $\sqrt{n}$ の連分数展開に関する計算を少し振り返った。そうした中、ネイピア数 e や 円周率 π の連分数展開はどうやって求めるのだろうという疑問が再度湧いてきた。$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ の連分数展開のような簡単な計算で示すことはできない。

この連分数展開を初めて示したのは Euler で、証明には Ricatti の微分方程式を用いたとのことである。([1] 「De fractionibus continius dssertatio」 Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1744 年) p.98-137。英語版は参考文献 [2])

e は無限連分数となることから 有理数ではないといえる。さらに、 $\sqrt{n}$ のような循環連分数にならないので、Legendre の定理により 2 次無理数と呼ばれるものにはならないことがいえる。

e が超越数であること（整数を係数とする多項式の根とならなこと）を初めて示したのは、Hermite である。証明にはある種の積分が用いられており、副産物としてこの連分数展開が示されているとのことである。

Euler や Hermite の方法について調べていないが、整数論の標準的な本には載っていないものと思う。きっと難しいのであろう。（見逃しているだけかもしれないが。）そこで、ネット上で調べてみたところ、近年わかりやすい証明（参考文献 [3]（2006 年）, [4]（2016 年)）が発表されていることを知った。それらを含めた 3 通りの方法について自分なりに解読し、まとめてみた。

目 次

1　連分数に関する基本事項

1.1　記号などについて

無限連分数とは、

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{\ddots\,\cfrac{\ddots}{a_n+\cfrac{b_n}{\ddots}}}}}$$

という形に表される数のことである。

書き表すスペースを少なくするため、この数を

$$[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),\quad\cdots\quad,(b_n.a_n),\quad\cdots\quad]$$

と書くことにする。

$$a_0+\frac{b_0}{a_1+}\frac{b_1}{a_2+}\quad\cdots\quad\frac{b_{n-1}}{a_n+}\quad\cdots$$

とも書く。これらの書き方を都合にあわせて使い分ける。

途中までで止めた有限連分数

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{\ddots\,\cfrac{\ddots}{a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

$$[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),\quad\cdots\quad,(b_n.a_n)]$$

を元の連分数の「第 n 部分連分数」と呼ぶことにする。

※　英語では「the n-th convergent」 と表されており、直訳すると「第 n 収束」といったことになるのだろうが、どうもしっくりこない。途中で止めた有限連分数が無限連分数の近似となるということから「第 n 近似」と呼ぶこともある。ただし、今は近似しているかどうかを考えているわけでは無い。

ここでは、無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ に対して、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$ を「部分和」と呼ぶことに習って「部分連分数」と呼ぶことにした。

連分数の内、分子がすべて１のもの

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

を正則連分数という。このとき、

$$[a_0, a_1, a_2, \quad \cdots \quad , a_n, \quad \cdots \quad]$$

と簡単に書き表すこととする。

1.2　連分数の基本定理

連分数

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots \cfrac{\ddots}{a_n + \cfrac{b_n}{\ddots}}}}}$$

に対して、

$$f_n(x, y) = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{y}{x}}}}}$$

$$= [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-2}, a_{n-1}), (y, x)]$$

とおく。例えば、

$$f_1(x, y) = a_0 + \frac{y}{x}, \qquad f_2(x, y) = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{y}{x}} = a_0 + \frac{b_0 x}{a_1 x + y} = \frac{(a_0 a_1 x + b_0)x + a_0 y}{a_1 x + y}$$

一般に、

$$f_n(x, y) = \frac{A_{n-1}x + B_{n-1}y}{C_{n-1}x + D_{n-1}y}$$

と表すことを考える。

$$f_{n+1}(x,y) = [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-1}, a_n), (y, x)]$$
$$= \left[a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , \left(b_{n-1}, a_n + \frac{y}{x}\right)\right]$$
$$= \frac{A_{n-1}\left(a_n + \frac{y}{x}\right) + B_{n-1}b_{n-1}}{C_{n-1}\left(a_n + \frac{y}{x}\right) + D_{n-1}b_{n-1}} = \frac{(a_nA_{n-1} + b_{n-1}B_{n-1})x + A_{n-1}y}{(a_nC_{n-1} + b_{n-1}D_{n-1})x + C_{n-1}y}$$

従って、

$$\begin{cases} A_n = a_nA_{n-1} + b_{n-1}B_{n-1} \\ B_n = A_{n-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_n = a_nC_{n-1} + b_{n-1}D_{n-1} \\ D_n = C_{n-1} \end{cases}$$

記号を改めて、$P_n = A_n,\, Q_n = C_n$ とすると、

$$f_n(x,y) = \frac{P_{n-1}x + P_{n-2}y}{Q_{n-1}x + Q_{n-2}y} \qquad (n \geqq 1)$$

$$P_n = a_nP_{n-1} + b_{n-1}P_{n-2} \qquad P_{-1} = 1, \quad P_0 = a_0$$

$$Q_n = a_nQ_{n-1} + b_{n-1}Q_{n-2} \qquad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

$y = b_{n-1},\, x = a_n$ とおくと、

$$f_n(a_n, b_{n-1}) = [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-2}, a_{n-1}), (b_{n-1}, a_n)] = \frac{a_nP_{n-1} + b_{n-1}P_{n-2}}{a_nQ_{n-1} + b_{n-1}Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n}$$

以上を次の定理にまとめる。

定理 1.1　（連分数の基本定理）
連分数

$$[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \quad \cdots \quad , (b_n.a_n), \quad \cdots \quad]$$

に対して、数列 $\{P_n\}, \quad \{Q_n\}$ を

$$P_{-1} = 1, \quad P_0 = a_0 \qquad P_n = a_nP_{n-1} + b_{n-1}P_{n-2}$$

$$Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1 \qquad Q_n = a_nQ_{n-1} + b_{n-1}Q_{n-2}$$

で定めるとき、第 n 部分連分数は

$$[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \quad \cdots \quad , (b_n.a_n)] = \frac{P_n}{Q_n}$$

となる。

1.3　連分数の収束について

部分連分数の階差を考えてみる。

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$\begin{aligned}\text{分子}&=(a_nP_{n-1}+b_{n-1}P_{n-2})Q_{n-1}-P_{n-1}(a_nQ_{n-1}+b_{n-1}Q_{n-2})\\&=-b_{n-1}(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1})\end{aligned}$$

繰り返して、

$$\text{分子}=(-b_{n-1})(-b_{n-2})\cdot\cdots\cdot(-b_0)(P_0Q_{-1}-P_{-1}Q_0)$$

$$=(-1)^nb_{n-1}b_{n-2}\cdot\cdots\cdot b_0(a_0\cdot 0-1\cdot 1)=(-1)^{n+1}b_{n-1}b_{n-2}\cdot\cdots\cdot b_0$$

これを階差数列の公式に代入して、

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_0}{Q_0}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{b_{k-1}b_{k-2}\cdot\cdots\cdot b_0}{Q_kQ_{k-1}}$$

以上をまとめて、次の命題となる。

命題 1.2

$$\frac{P_n}{Q_n}=a_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{b_{k-1}b_{k-2}\cdot\cdots\cdot b_0}{Q_kQ_{k-1}}$$

定理 1.3　（正項連分数の収束条件）
連分数 $[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),\ \cdots\ ,(b_n.a_n),\ \cdots\ ]$ において、すべての n について、$a_n>0,\ b_n>0$ であり、さらに正の数 $\epsilon>0$ が存在して、すべての n について、$\dfrac{a_{n+1}a_n}{b_n}>\epsilon$ が成り立つとき、

$$\lim_{n\to\infty}[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),\ \cdots\ ,(b_n.a_n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}$$

は、有限な極限値を持つ。

証明）$c_k=\dfrac{b_{k-1}b_{k-2}\cdot\cdots\cdot b_0}{Q_kQ_{k-1}}$ とおく。$c_k>0$ である。

このとき、$\dfrac{P_n}{Q_n}=a_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot c_k$ と交代級数で表される。

$$\frac{c_k}{c_{k+1}}=\frac{b_{k-1}b_{k-2}\cdot\cdots\cdot b_0}{Q_kQ_{k-1}}\cdot\frac{Q_{k+1}Q_k}{b_kb_{k-1}b_{k-2}\cdot\cdots\cdot b_0}=\frac{Q_{k+1}}{b_kQ_{k-1}}=\frac{a_{k+1}Q_k+b_kQ_{k-1}}{b_kQ_{k-1}}$$

$$=1+\frac{a_{k+1}Q_k}{b_kQ_{k-1}}=1+\frac{a_{k+1}(a_kQ_{k-1}+b_{k-2}Q_{k-2})}{b_kQ_{k-1}}>1+\frac{a_{k+1}a_k}{b_k}>1+\epsilon$$

従って、 $0 < c_{k+1} < \dfrac{1}{1+\epsilon} c_k \qquad 0 < c_k < \left(\dfrac{1}{1+\epsilon}\right)^{k-1} c_1 \qquad \therefore \quad \lim_{k\to\infty} c_k = 0$

交代級数に関する Leibnitz の判定条件から、この級数は収束する。//

系 1.4

$\epsilon > 0$ とする。十分大きなすべての自然数 n に対して、 $a_n > 0\, b_n > 0$ であれば、

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-1}, a_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

は、有限な極限値を持つ。

ところで、

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-1}, a_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

が、有限な値に収束しても、その値が何になるのかについては注意が必要である。

例 $x = 1 - \sqrt{2}$ の連分数展開について

$x = 1 - \sqrt{2}$ のとき、$\sqrt{2} = 1 - x$ より、 $2 = 1 - 2x + x^2 \qquad x^2 = 2x + 1 \qquad x = 2 + \dfrac{1}{x}$

$$1 - \sqrt{2} = \left[2, 1 - \sqrt{2}\right] = \left[2, 2, 1 - \sqrt{2}\right] = \left[2, 2, 2, 1 - \sqrt{2}\right] = \quad \cdots$$

$$= \left[2, 2, 2, \quad \cdots \quad , 2, 1 - \sqrt{2}\right] = \quad \cdots$$

これをずっと続けていくことで、

$$\lim_{n\to\infty} [2, 2, 2, \quad \cdots \quad , 2] = 1 - \sqrt{2}$$

となるのであろうか？

部分連分数は明らかに正なのに、その極限値が負の数 $1 - \sqrt{2}$ となることはあり得ないだろう。

この連分数は、$\dfrac{a_{n+1} a_n}{b_n} = \dfrac{2 \cdot 2}{1} = 4$ より収束判定条件を満たすが、極限値は $1 - \sqrt{2}$ ではなく、 $1 + \sqrt{2}$ になるのである。

このようなおかしなことが起こるのは、部分連分数の最終項が負の数 $1 - \sqrt{2}$ であることに起因している。最後に、どんでん返しを起こしているような感じである。

正項連分数に関しては、次の Markov の判定条件が成り立つ。

定理 1.5 （Markov の収束判定条件）

連分数 $[a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-1}, a_n), \quad \cdots \quad]$ において、 すべての n について、 $a_n > 0,\, b_n > 0,$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-1}, a_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$$

と収束するとする。このとき、数列 $\{z_n\}$ を

$$z_0 = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + z_1} = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + z_2}} = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_3 + z_3}}} = \quad \cdots$$

と定めていく。

もし、すべての自然数 n について、 $z_n > 0$ であるならば、 $\alpha = z_0$ が成り立つ。

証明） $t_0(x) = a_0 + x, \quad t_1(x) = \dfrac{b_0}{a_1 + x}, \quad \cdots \quad , t_k(x) = \dfrac{b_{k-1}}{a_k + x}, \quad \cdots$ とおく。

$$t_{k-1}(t_k(x)) = \frac{b_{k-2}}{a_{k-1} + t_k(x)} = \cfrac{b_{k-2}}{a_{k-1} + \cfrac{b_{k-1}}{a_k + x}}$$

であるから、$T_n(x) := (t_0 \circ t_1 \circ \quad \cdots \quad \circ t_n)(x)$ とすると、$T_n(z_n) = z_0$ である。

各 $t_k(x)$ は区間 $[0, +\infty)$ において単調減少であるから、それらを合成した関数 $T_n(x)$ は区間 $[0, +\infty)$ において単調な関数である。（交互に単調増加、単調減少が入れ替わる。）

ここで、

$$T_n(0) = [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-1}, a_n)] = \frac{P_n}{Q_n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} T_n(x) = [a_0, (b_0, a_1), (b_1, a_2), \quad \cdots \quad , (b_{n-2}, a_{n-1})] = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

となる。条件より $0 < z_n < +\infty$ であることと $T_n(x)$ の単調性より、$T_n(z_n)$ は $\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ と $\dfrac{P_n}{Q_n}$ の間にある。連分数が収束することより、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n}{Q_n} = \alpha \qquad \therefore \text{はさみうちにより、} \quad z_0 = \lim_{n \to \infty} T_n(z_n) = \alpha \quad //$$

2　証明その１　ある種の積分を用いた証明

ここで述べる方法は、

[3] Henry Cohn 「A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e 」

Amer.Math.Monthly 113(2006) p.57-62

によるものである。

Cohn の方法はHermiteの方法を源に持つものであり、ある積分を天下り的に与えてきわめて短く終えている。ありがたいことに、どうしてそのような積分を用いるか、論文の第３部に「Motivation」というタイトルの解説を書いてくれている。

2.1 e の連分数展開の変更と部分連分数にかかわる漸化式

補題 **2.1** $e=[1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,\quad\cdots\quad,2n,1,1,\quad\cdots]$

証明）

$$[1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,\quad\cdots\quad,2n,1,1,\quad\cdots]=1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{X}}}$$

$$X=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}\quad=\quad[1,2,1,1,4,1,1,\quad\cdots\quad]$$

とおく。

$$1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{X}}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{X}{X+1}}=1+\frac{X+1}{X}=2+\frac{1}{X}=[2,1,2,1,1,4,1,1,\quad\cdots\quad]=e\quad //$$

この補題の形のほうが、最初の部分から規則性があるものとなっている。
すなわち、$a_{3n+1}=2n,\quad a_{3n}=a_{3n+2}=1\quad(n=0,1,2,\quad\cdots\quad)$ とおいて、

$$e=[a_0,a_1,a_2,\quad\cdots\quad,a_{3n},a_{3n+1},a_{3n+2},\quad\cdots\quad]$$

と表される。

部分連分数 $[a_0,a_1,a_2,\quad\cdots\quad,a_n]=\dfrac{P_n}{Q_n}$ については、

$P_{-1}=1,\quad P_0=1$
$P_{3n}=P_{3n-1}+P_{3n-2},\qquad P_{3n+1}=2nP_{3n}+P_{3n-1},\qquad P_{3n+2}=P_{3n+1}+P_{3n},$

$Q_{-1}=0,\quad Q_0=1$
$Q_{3n}=Q_{3n-1}+P_{3n-2},\qquad Q_{3n+1}=2nQ_{3n}+Q_{3n-1},\qquad Q_{3n+2}=Q_{3n+1}+Q_{3n},$

により求めていける。最初のいくつかを漸化式で計算したものを下の表に挙げる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	1	0	1	1	2	1	1	4	1	1	$\cdots$
P_n	1	1	2	3	8	11	19	87	106	193	$\cdots$
Q_n	1	0	1	1	3	4	7	32	39	71	$\cdots$

2.2　ある定積分による数列の構成

天下り的ではあるが、次のように数列を定める。

$$r_{3n} = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx = q_{3n}e - p_{3n}$$

$$r_{3n+1} = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx = q_{3n+1}e - p_{3n+1}$$

$$r_{3n+2} = -\int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx = q_{3n+2}e - p_{3n+2}$$

このとき、最初のいくつかを計算してみる。

$$r_0 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1 \qquad p_0 = 1,\ q_0 = 1$$

$$r_1 = -\int_0^1 xe^x dx = -[xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -e + (e-1) = -1 \qquad p_1 = 1,\ q_1 = 0$$

$$r_2 = -\int_0^1 (x-1)e^x dx = -\int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 e^x dx = r_1 + r_0 = -1 + (e-1) = e-2$$

$$p_2 = 2,\ q_2 = 1$$

$$\begin{aligned} r_3 &= \int_0^1 x(x-1)e^x dx = [x(x-1)e^x]_0^1 - \left\{ \int_0^1 (x-1)e^x dx + \int_0^1 xe^x dx \right\} \\ &= 0 + r_2 + r_1 = (e-2) + (-1) = e-3 \qquad p_3 = 3,\ q_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 &= -\int_0^1 x^2(x-1)e^x dx = -\left[x^2(x-1)e^x\right]_0^1 - \left\{ \int_0^1 2x(x-1)e^x dx + \int_0^1 x^2e^x dx \right\} \\ &= 2r_3 + [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = 2(e-3) + e - 2 = 3e-8 \qquad p_4 = 8,\ q_4 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_5 &= -\int_0^1 x(x-1)^2e^x dx = -\int_0^1 x(x-1)\cdot(x-1)e^x dx \\ &= -\int_0^1 x^2(x-1)e^x dx + \int_0^1 x(x-1)e^x dx \\ &= r_4 + r_3 = (3e-8) + (e-3) = 4e-11 \qquad p_5 = 11,\ q_5 = 4 \end{aligned}$$

ここまでの計算を見ると、 $p_n = P_n$,　$q_n = Q_n$ が成り立っている。すべての $n = 0, 1, 2, \quad \cdots$ に対して $p_n = P_n$,　$q_n = Q_n$ が成り立っていることを示す。

定理 2.2

連分数 $[1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1, \quad \cdots \quad]$ の第 n 部分連分数を $\dfrac{P_n}{Q_n}$ とするとき、次が成り立つ。

$$r_{3n} = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx = Q_{3n}e - P_{3n}$$

$$r_{3n+1} = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x dx = Q_{3n+1}e - P_{3n+1}$$

$$r_{3n+2} = -\int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x dx = Q_{3n+2}e - P_{3n+2}$$

証明） r_0, r_1, r_3 については、実際に積分を計算した値から正しい。

加えて、$r_{3n} = r_{3n-1} + r_{3n-2}$, $r_{3n+1} = 2nr_{3n} + r_{3n-1}$, $r_{3n+2} = r_{3n+1} + r_{3n}$ を示すことができたとすれば、$\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ に関する漸化式から、数学的帰納法によりすべての n について定理の関係式が成り立つことが言える。

- $r_{3n} = r_{3n-1} + r_{3n-2}$ について

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right) = \frac{nx^{n-1}(x-1)^n + x^n \cdot n(x-1)^{n-1} + x^n(x-1)^n}{n!}e^x$$

$$= \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x$$

従って、

$$-r_{3n-2} - r_{3n-1} + r_{3n} = \left[\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right]_0^1 = 0 \qquad \therefore \quad r_{3n} = r_{3n-1} + r_{3n-2}$$

- $r_{3n+1} = r_{3n} + r_{3n-1}$ について

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right) = \frac{nx^{n-1}(x-1)^{n+1} + x^n \cdot (n+1)(x-1)^n + x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x$$

$$= \frac{x^{n-1}(x-1)^n\{n(x-1) + (n+1)x + x(x-1)\}}{n!}e^x = \frac{x^{n-1}(x-1)^n(x^2+2nx-n)}{n!}e^x$$

$$= \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x$$

従って、

$$-r_{3n+1} + 2nr_{3n} + r_{3n-1} = \left[\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right]_0^1 = 0 \qquad \therefore \quad r_{3n+1} = r_{3n} + r_{3n-1}$$

- $r_{3n+2} = r_{3n+1} + r_{3n}$ について

$$\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x = \frac{x^n(x-1)^n\{1-x+(x-1)\}}{n!}e^x = 0$$

であるから、

$$r_{3n} + r_{3n+1} - r_{3n+2} = 0 \qquad \therefore \quad r_{3n+2} = r_{3n+1} + r_{3n}$$

以上により、定理は成り立つ。//

定理 2.3 $[1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1, \quad \cdots \quad] = e$ が成り立つ。

証明）$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq |x(x-1)| < 1$ である。従って、 $0 \leqq \left|\dfrac{x(x-1)}{n!}\right| < \dfrac{1}{n!}$

よって、

$$0 \leqq |r_{3n}| < \int_0^1 \frac{1}{n!}dx = \frac{1}{n!} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} r_{3n} = 0$$

同様に、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} r_{3n+2} = 0$ となる。

従って、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(Q_n e - P_n) = 0$

作り方から $\{Q_n\}$ は単調に増加する整数の列であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q_n = +\infty$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(e - \frac{P_n}{Q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \quad \frac{Q_n e - P_n}{Q_n} = 0$

すなわち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n} = e$ となる。//

以上により、$e = [1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1, \quad \cdots \quad] = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1, \quad \cdots \quad]$ の証明が終わった。なお、計算は、高校生でも理解できるものである。

もし、「天下り的に」として導入した $r_{3n},\, r_{3n+1},\, r_{3n+2}$ という積分をどうやって思いつくのかについても理解を深めたいのであれば、次の節が参考となる。

2.3 証明のアイディア … e^z を近似する有理関数について

2.3.1 Padé 近似とは

積分の利用は Hermite によるものであり、Hermite は関数 e^z に関する Padé 近似（Hermite の学生であった Padé の名前に由来する関数の近似）を用いたとのことである。

定義 2.4 べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ の (m,n) 型の Padé 近似とは、

$p(z)$ が m 次多項式、$q(z)$ が 定数項が 0 でない n 次多項式で、有理式 $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ の形式的べき級数の $1, z, z^2 \quad \cdots \quad z^{m+n}$ の係数が $a_0,\, a_1,\, a_3, \quad \cdots \quad, a_{m+n}$ に等しいもののことをいう。

<u>注意</u> $p(z)$ が $m+1$ 個の係数を持ち、$q(z)$ が $+1$ 個の係数を持つので, 合わせて $m+n+2$ の自由度がある。ただし、$p(z), q(z)$ に同じ数をかけたものからは同じ有理式がでるので自由度が 1 つ減る。従って、$m+n+1$ 個の係数を一致させることができる。

例 e^z の $(2,1)$ 型 Padé 近似

$p(z)=a+bz+cz^2,\quad q(z)=1+dz$ とし、$\dfrac{p(z)}{q(z)}$ の形式的べき級数の $1,z,z^2,z^3$ の係数が $e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ の $1,z,z^2,z^3$ の係数と一致するように考える。

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{a+bz+cz^2}{1+dz}=(a+bz+cz^2)(1-dz+d^2z^2-d^3z^3+\quad\cdots\quad)$$

$$=a+(b-ad)z+(c-bd+ad^2)z^2+(-d^3+bd^2-cd)z^3+\quad\cdots$$

従って、

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-ad &= 1 \\ c-bd+ad^2 &= \dfrac{1}{2!} \\ -d^3+bd^2-cd &= \dfrac{1}{3!} \end{cases}$$

これを解いて、$a=1,\ b=\dfrac{2}{3},\ c=\dfrac{1}{6}\ d=-\dfrac{1}{3}$

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{1+\dfrac{2}{3}z+\dfrac{1}{6}z^2}{1-\dfrac{1}{3}z}=\frac{6+4z+z^2}{2(3-z)}$$

$z=1$ とすれば e の近似値として

$$\frac{p(1)}{q(1)}=\frac{11}{4}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=[2,1,2,1]\quad\cdots\quad e \text{ の第3部分連分数になっている。}$$

補題 2.4　$(m.n)$ 型の Padé 近似は一意的に定まる。

証明）$\dfrac{r(z)}{s(z)}$ も $(m.n)$ 型の Padé 近似であったとする。

$$\frac{p(z)}{q(z)}-\frac{r(z)}{s(z)}=\frac{p(z)s(z)-q(z)r(z)}{q(z)s(z)}$$

であり、左辺の形式的べき級数の $1,z,z^2\quad\cdots\quad z^{m+n}$ の係数は 0 である。従って、右辺の分子は z^{m+n+1} で割り切れる。しかるに、右辺の分子は高々$m+n$ 次の多項式であるから、恒等的に 0 である。よって、$\dfrac{r(z)}{s(z)}$ は恒等的に $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ に等しい。//

2.3.2 $e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$ の (m,n) 型 Padé 近似 $\frac{p(z)}{q(z)}$ について

$$e^z-\frac{p(z)}{q(z)}=\sum_{k=m+n+1}^{\infty}a_kz^k=z^{m+n+1}\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+n+1+k}z^k=z^{m+n+1}h(z)\qquad\left(h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+n+1+k}z^k\right)$$

変形して

$$\frac{q(z)e^z-p(z)}{z^{m+n+1}}=q(z)h(z)$$

上式の左辺のような形の式を得るために、 積分 $\int_0^1 x^n e^{zx}dx$ を考えてみる。このような積分は、部分積分法を学んだ人であれば誰でも、何かしらの機会に計算しているようなものである。Hermite はこのような積分がべき級数の扱いにとても役立つことに気づいたようである。

- $n=0$ のとき

$$\int_0^1 e^{zx}dx=\left[\frac{1}{z}e^{zx}\right]_0^1=\frac{e^z-1}{z}\qquad e^z-1=z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\quad\cdots$$

より、$p(z)=1,\ q(z)=1$ は $(0,0)$ 型の Padé 近似となる。

- $n=1$ のとき
部分積分法により、

$$\int_0^1 xe^{zx}dx=\left[x\cdot\frac{1}{z}e^{zx}\right]_0^1-\frac{1}{z}\int_0^1 e^{zx}dx=e^z-\frac{1}{z^2}(e^z-1)=\frac{(z-1)e^z+1}{z^2}$$

ここで

$$(z-1)e^z+1=\left(z+z^2+\frac{1}{2!}z^3+\quad\cdots\quad\right)-\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\quad\cdots\quad\right)+1$$

$$=\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}+\quad\cdots$$

従って、 $p(z)=-1,\ q(z)=z-1$ は $(0,1)$ 型の Padé 近似になっている。

- $n=2$ のとき

$$\int_0^1 x^2e^{zx}dx=\left[x^2\cdot\frac{1}{z}e^{zx}\right]_0^1-\frac{1}{z}\int_0^1 2xe^{zx}dx=\frac{e^z}{z}-2\frac{(z-1)e^z+1}{z^3}$$

$$=\frac{(z^2-2z+2)e^z-2}{z^3}$$

$(z^2-2z+2)e^z-2$

従って、 $p(z)=2,\ q(z)=z^2-2z+2$ は $(0,2)$ 型の Padé 近似である。

$$=\qquad\left(z^2+z^3+\frac{1}{2!}z^4+\frac{1}{3!}+z^5*\quad\cdots\quad\right)$$

$$-2\left(z+z^2+\frac{1}{2!}z^3+\frac{1}{3!}+z^4+\quad\cdots\quad\right)$$
$$+2\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z^3*\quad\cdots\quad\right)-2$$
$$=\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4+\quad\cdots$$

さて、ここまでの結果を踏まえて積分 $\displaystyle\int_0^1(ax^2+bx+c)e^{zx}dx$ を考えてみる。

$$\int_0^1(ax^2+bx+x)e^{zx}dx=a\frac{(z^2-2z+2)e^z-2}{z^3}+b\frac{(z-1)e^z+1}{z^2}+c\frac{e^z-1}{z}$$
$$=\frac{a\{(z^2-2z+2)e^z-2\}+bz\{(z-1)e^z+1\}+cz^2(e^z-1)}{z^3}$$

これまでのことから

$$a\{(z^2-2z+2)e^z-2\}+bz\{(z-1)e^z+1\}+cz^2(e^z-1)$$

が z^3 で割り切れることがわかる。整理すると

$$=\{(a+b+c)z^2-(2a+b)z+2a\}e^z-(cz^2-bz+2a)$$

従って、

$$p(z)=cz^2-bz+2a,\quad q(z)=(a+b+c)z^2+(-2a-b)z+2a$$

ここで、 $p(z),q(z)$ はいずれも 2 次以下である。さらに、分母の z^{m+n+1} にあたるところが z^3 となっていることから、 $m+n=2$ 。従って、$(1,1)$ 型である。

$p(z),\,q(z)$ の 2 次の係数が消えることから、$c=0,\,a+b+c=0$。　従って、$b=-a$

$$p(z)=az+2a,\quad q(z)=-az+2a,\qquad \frac{p(z)}{q(z)}=\frac{a(z+2)}{a(-z)+2}=\frac{z+2}{-z+2}$$

$$\frac{p(1)}{q(1)}=3=2+\frac{1}{1}=[2,1]\qquad\cdots\quad \text{eの第 1 部分連分数}$$

$r(x)=ax^2+bx+c$ のとき、 $r'(x)=2x+b,\quad r''(x)=2a$。従って、$p(z)=r(0)z^2-r'(0)z+r''(0),\quad q(z)=r(1)z^2-r'(1)z+r''(1),$ となっていることがわかる。一般に $r(x)$ を k 次多項式として 積分 $\displaystyle\int_0^1 r(x)e^{zx}dx$ を考えてみる。

$$\int_0^1 r(x)e^{zx}dx=\left[r(x)\cdot\frac{1}{z}e^{zx}\right]_0^1-\frac{1}{z}\int_0^1 r'(x)e^{zx}dx=\frac{r(1)e^z-r(0)}{z}-\frac{1}{z}\int_0^1 r'(x)e^{zx}dx$$

ここで、$\displaystyle\int_0^1 r(x)e^{zx}dx$ に部分積分法を適用すると

$$\int_0^1 r(x)e^{zx}dx=\frac{r(1)e^z-r(0)}{z}-\frac{r'(1)e^z-r'(0)}{z^2}+\frac{1}{z^2}\int_0^1 r''(x)e^{zx}dx$$

$$= \frac{\{r(1)z - r'(1)\}e^z - \{r(0)z - r'(0)\}}{z^2} + \frac{1}{z^2}\int_0^1 r''(x)e^{zx}dx$$

以下同様に部分積分を繰り返す。 $r(x)$ は k 次の多項式であるから $r^{(k+1)}(x)$ は消えることに注意して次を得る。

$$\int_0^1 r(x)e^{zx}dx$$

$$= \frac{\{r(1)z^k - r^{(1)}(1)z^{k-1} + \quad \cdots \quad + (-1)^k r^{(k)}(1)\}e^z}{z^{k+1}}$$

$$- \frac{r(0)z^k - r^{(1)}(0)z^{k-1} + \quad \cdots \quad + (-1)^k r^{(k)}(0)}{z^{k+1}}$$

$$= \frac{q(z)e^z - p(z)}{z^{k+1}}$$

$$p(z) = r(0)z^k - r^{(1)}(0)z^{k-1} + \quad \cdots \quad + (-1)^k r^{(k)}(0)$$

$$q(z) = r(1)z^k - r^{(1)}(1)z^{k-1} + \quad \cdots \quad + (-1)^k r^{(k)}(1)$$

$m, n \leqq k, k = m + n$ のとき、m 次多項式 $p(z)$ および n 次多項式 $q(z)$ を上記の $r(x)$ をうまく設定することで作ることができる。このとき、 $\displaystyle\int_0^1 r(x)e^{zx}dx$ は z の正則関数であるから、 $\dfrac{q(z)e^z - p(z)}{z^{k+1}}$ が正則関数であることがわかる。すると、

$$e^z - \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^{k+1}}{q(z)}\int_0^1 r(x)e^{zx}dx$$

により、$\dfrac{p(z)}{q(z)}$ は e^z の (m, n) 型の Padé 近似である。

$p(z)$ が m 次多項式になるには、$z^k, z^{k-1} \quad \cdots \quad , z^{m+1}$ の係数がすべて 0 となることが必要になる。よって、 $r(0) = r^{(1)}(0) = \quad \cdots \quad =, (-1)^{k-m-1}r^{(k-m-1)} = 0$ 。すなわち、$r(x)$ は $x^{k-m} = x^n$ で割り切れる。

同様に、 $q(z)$ が n 次多項式になることから、 $r(x)$ は $(x-1)^m$ で割り切れる。

この条件を満たす多項式のうち最もシンプルなものとして、$r(x) = x^n(x-1)^m$ とできる。さらに、部分積分をうまく操作できるように $r(x) = \dfrac{x^n(x-1)^m}{l!}$ としたのが「天下り的に」の背景にあるということである。

3　証明その 2　$e^{1/M}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!M^i}$ に関連した無限級数を用いた方法

これは、[4] Joseph Tonien 「A Simple Proof of Euler's Continued Fraction of $e^{1/M}$」
2016 年　The Mathmatical Gazzette 100(548) p.279-287
によるものである。
この方法は、漸化式を利用するだけのもので、積分は用いない。

3.1　無限級数の定義と漸化式

定義 3.1　M を正の実数とする。

$$S_0=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!M^i}\quad(=e^{1/M}-1)$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{(i+1)!M^i}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_k=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-k)}{(i+k)!M^i}$$

$$\cdots\cdots$$

と定義する。

収束については、

$$\frac{a_i}{a_{i+1}}=\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-k)}{(i+k)!}\cdot\frac{(i+1+k)!}{i(i-1)(i-2)\cdots(i+1-k)}$$

$$=\frac{(i-k)(i+1+k)}{i}\quad\to+\infty\quad(i\to\infty)$$

であるから任意の正の実数 M について収束する。そして、以下の漸化式が成り立つ。

補題 3.2　$S_{n;2}+(4n+6)MS_{n+1}-S_n=0$ が成り立つ。
証明）

$$S_{n+2}-S_n=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-n-2)}{(i+n+2)!}-\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-n)}{(i+n)!}\right\}\frac{1}{M^i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-n)\{(i-n-1)(i-n-2)-(i+n+1)(i+n+2)\}}{(i+n+2)!}\cdot\frac{1}{M^i}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-n)\{-(4n+6)i\}}{(i+n+2)!} \cdot \frac{1}{M^i}$$

$$= -(4n+6)M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-n)}{(i+n+2)!} \cdot \frac{1}{M^{i+1}}$$

$$= -(4n+6)M \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-n-1)}{(k+n+1)!} \cdot \frac{1}{M^k} \qquad (i+1=k)$$

$$= -(4n+6)M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-n-1)}{(k+n+1)!} \cdot \frac{1}{M^k} \qquad (k=1 \text{のときの項は} 0)$$

$$= -(4n+6)MS_{n+1}//$$

定義 3.1 では、 S_{-1} を定義していないが、補題 3.2 を用いて S_{-1} を以下のとおり定義する。

$$S_{-1} = 2MS_0 + S_1 = 2M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!M^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{(i+1)!M^i}$$

$$= 2+2\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!M^{i-1}} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i-2}{i!M^{i-1}} = 2+\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!M^{i-1}} = 2+(e^{1/M}-1) = 1+e^{1/M}$$

以上をまとめると

$$\underline{S_{-1} = 1 + e^{\frac{1}{M}},\ S_0 = e^{\frac{1}{M}} \qquad S_{n+2} + (4n+6)MS_{n+1} - S_n = 0 \quad (n \geqq -1)}$$

3.2 無限級数に関する連分数展開

漸化式を $2S_{n+1}$ で割って変形すると、

$$\frac{S_n}{2S_{n+1}} = (2n+3)M + \cfrac{\frac{1}{4}}{\cfrac{S_{n+1}}{2S_{n+2}}}$$

$n = -1$ として、

$$\frac{S_{-1}}{2S_0} = M + \cfrac{\frac{1}{4}}{\cfrac{S_0}{2S_1}}$$

右辺の $\dfrac{S_0}{2S_1}$ を同様に変形すると

$$\frac{S_{-1}}{2S_0} = M + \cfrac{\frac{1}{4}}{3M + \cfrac{\frac{1}{4}}{\cfrac{S_1}{2S_2}}} = \left[M, \left(\frac{1}{4}, 3M\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{S_1}{2S_2}\right)\right]$$

以下同様に繰り返していって、

$$\frac{S_{-1}}{2S_0} = \left[M, \left(\frac{1}{4}, 3M\right), \left(\frac{1}{4}, 5M\right), \quad \cdots \quad , \left(\frac{1}{4}, (2n-1)M\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{S_{n-1}}{2S_n}\right) \right]$$

この連分数について、定理 1.3　正項連分数の収束に関する判定条件を調べてみる。

$a_n = (2n{+}1)M,\ b_n\ \frac{1}{4}$ であるから $a_n,\ b_n > 0$　　$\dfrac{a_{n+1}a_n}{b_n} = 4(2n{+}3)(2n{-}1)M^2 \geqq 20M^2$ より、ある正の数 ϵ が存在して、すべての自然数 n について、$\dfrac{a_{n+1}a_n}{b_n} > \epsilon$ が成り立つ。

従って、定理 1.3 の条件をみたすので、

$$\lim_{n\to\infty} \left[M, \left(\frac{1}{4}, 3M\right), \left(\frac{1}{4}, 5M\right), \quad \cdots \quad , \left(\frac{1}{4}, (2n-1)M\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{S_{n-1}}{2S_n}\right) \right]$$

は有限な値に収束する。　　さらに、すべての自然数 n について、$\dfrac{S_{n-1}}{2S_n} > 0$ であるから、定理 1.5 により、その極限値は $\dfrac{S_{-1}}{2S_0}$ に等しい。

$$\frac{S_{-1}}{2S_0} = \frac{1 + e^{\frac{1}{M}}}{2(e^{\frac{1}{M}} - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{1}{M}} - 1}$$

であるから

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{1}{M}} - 1} = M + \cfrac{\frac{1}{4}}{3M + \cfrac{\frac{1}{4}}{5M + \cfrac{\frac{1}{4}}{\ddots}}}$$

両辺から $\frac{1}{2}$ を引いてから両辺の逆数をとり、さらに両辺に 1 を加えると

$$e^{\frac{1}{M}} = 1 + \cfrac{1}{M - \frac{1}{2} + \cfrac{\frac{1}{4}}{3M + \cfrac{\frac{1}{4}}{5M + \cfrac{\frac{1}{4}}{\ddots}}}}$$

$$= \quad \left[1, \left(1, M - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, 3M\right), \left(\frac{1}{4}, 5M\right), \left(\frac{1}{4}, 7M\right), \quad \cdots \quad \right]$$

3.3 正則連分数への変形

補題 3.3 次の変形が成り立つ。

$$A - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{B} = A - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{B - \frac{1}{2}}}}$$

証明)

$$\text{右辺} = A - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{B - \frac{1}{2}}{B + \frac{1}{2}}} = A - 1 + \frac{B + \frac{1}{2}}{2B} = A - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{B} = \text{右辺} \qquad //$$

この補題を順次使っていく。

連分数で

$$\left[\quad \cdots \quad , \left(\cdots , A - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, B\right), \quad \cdots \quad \right]$$

のところが、

$$\left[\quad \cdots \quad , (\cdots , A - 1), (1,1), (1,1), \left(1, B - \frac{1}{2}\right), \quad \cdots \quad \right]$$

に変わるということであるから、

$$e^{\frac{1}{M}} = \left[1, \underline{\left(1, M - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, 3M\right)}, \left(\frac{1}{4}, 5M\right), \left(\frac{1}{4}, 7M\right), \quad \cdots \quad \right]$$

$$= \left[1, \underline{(1, M-1), (1,1), (1,1), \left(\frac{1}{4}, 3M - \frac{1}{2}\right)}, \left(\frac{1}{4}, 5M\right), \left(\frac{1}{4}, 7M\right), \quad \cdots \quad \right]$$

$$= \left[1, (1, M-1), (1,1), (1,1), \underline{(1, 3M-1), (1,1), (1,1), \left(\frac{1}{4}, 5M - \frac{1}{2}\right)}, \left(\frac{1}{4}, 7M\right), \quad \cdots \quad \right]$$

$$= \qquad \cdots$$

繰り返していくと、次の定理のような正則連分数に変形される。

定理 3.4 M を正の実数とするとき、

$$e^{\frac{1}{M}} = [1, M-1, 1, 1, 3M-1, 1, 1, 5M-1, 1, 1, 7M-1, 1, 1, \quad \cdots \quad]$$

$M = 1$ のとき

$$e = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \quad \cdots \quad] = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \quad \cdots \quad]$$

以上により、e の連分数展開が証明された。

4　証明その3　級数 $F(\alpha,\beta:x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha:n)}{(\beta:n)n!}x^n$ を利用する方法

これは、Wikipedia の「ガウスの連分数」に記載されている方法である。
([5]https://ja.wikipedia.org/wiki/ガウスの連分数)
経緯としては、e より前に円周率 π の連分数展開について調べていて、超幾何級数が満たす関係式から連分数に結びつけるガウスの方法にたどり着いた。（参考文献 [?] 中川仁「円周率の連分数展開について」）
それでは、e はどうなのかと調べたら、超幾何級数より簡単な級数から結びつけることができるのであった。

4.1　級数で表される関数の定義と隣接関係式

定義 4.1　$a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ に対して $(a:n)=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ と定義する。また、$(a;0)=1$ と定義する。

例えば
$(0:n)=0,\qquad (1:n)=1\cdot 2\cdots n=n!$

$$\left(\frac{1}{2}:n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

定義 4.2　$\beta\neq 0$ に対して $F(\alpha,\beta:x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha:n)}{(\beta:n)n!}x^n$ と定義する。

x^n の係数を a_n とすると

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(\alpha:n)}{(\beta:n)n!}\cdot\frac{(\beta:n+1)(n+1)!}{(\alpha:n+1)}=\frac{(\beta+n)(n+1)}{\alpha+n}\quad\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

であるから、$|x|<+\infty$ で収束する。

α,β を少し変化させて、もとの $F(\alpha,\beta:x)$ との関係を考えてみる。

(1) $F(\alpha,\beta+1:x)-F(\alpha,\beta:x)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha:n)}{(\beta+1:n)n!}-\frac{(\alpha:n)}{(\beta:n)n!}\right\}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha:n)\{\beta-(\beta+n)\}}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)n!}x^n$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha:n)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)(n-1)!}x^n$$

$$=-\frac{\alpha x}{\beta(\beta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1:n-1)}{(\beta+2:n-1)(n-1)!}x^{n-1}$$

$$= -\frac{\alpha x}{\beta(\beta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1:n)}{(\beta+2:n)n!}x^n = -\frac{\alpha x}{\beta(\beta+1)}F(\alpha+1,\beta+2:x)$$

従って、

$$\underline{F(\alpha,\beta:x) = F(\alpha,\beta+1:x) + \frac{\alpha x}{\beta(\beta+1)}F(\alpha+1,\beta+2:x) \quad \cdots \quad ①}$$

(2) $F(\alpha+1,\beta+1:x) - F(\alpha,\beta:x)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha+1:n)}{(\beta+1:n)n!} - \frac{(\alpha:n)}{(\beta:n)n!}\right\}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)\{\beta(\alpha+n)-(\beta+n)\alpha\}}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)n!}x^n$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)n(\beta-\alpha)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)n!}x^n$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1:n-1)}{(\beta+2:n-1)(n-1)!}x^{n-1}$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1:n)}{(\beta+2:n)n!}x^n = \frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}xF(\alpha+1,\beta+2:x)$$

従って、

$$\underline{F(\alpha,\beta:x) = F(\alpha+1,\beta+1:x) + \frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}xF(\alpha+1,\beta+2:x) \quad \cdots \quad ②}$$

これらを隣接関係式という。

4.2 関数の隣接関係式を用いた連分数展開

①, ② を用いて連分数展開を行う。

$$\frac{F(\alpha,\beta:x)}{F(\alpha+1,\beta+1:x)} = 1 + \frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}x\cdot\frac{1}{\dfrac{F(\alpha+1,\beta+1:x)}{F(\alpha+1,\beta+2:x)}} \qquad (\because \quad ②)$$

$$= \left[1, \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}x, \frac{F(\alpha+1,\beta+1:x)}{F(\alpha+1,\beta+2:x)}\right)\right]$$

続いて、

$$\frac{F(\alpha+1,\beta+1:x)}{F(\alpha+1,\beta+2:x)}=1+\frac{\alpha+1}{\beta(\beta+1)}x\cdot\frac{1}{\dfrac{F(\alpha+1,\beta+2:x)}{F(\alpha+2,\beta+3:x)}}\qquad(\because\quad ①)$$

よって、

$$\frac{F(\alpha,\beta:x)}{F(\alpha+1,\beta+1:x)}=\left[1,\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}x,1\right),\left(\frac{\alpha+1}{(\beta+1)(\beta+2)}x,\frac{F(\alpha+1,\beta+2:x)}{F(\alpha+2,\beta+3:x)}\right)\right]$$

以下、同様な操作を繰り返す。

$$b_{2k}=\frac{\alpha-\beta-k}{(\beta+2k)(\beta+2k+1)}x,\quad b_{2k+1}=\frac{\alpha+k+1}{(\beta+2k+1)(\beta+2k+2)}x$$

と置いて、

$$\frac{F(\alpha,\beta:x)}{F(\alpha+1,\beta+1:x)}=1+\cfrac{b_0}{1+\cfrac{b_1}{1+\cfrac{b_2}{1+\cfrac{b_3}{\ddots}}}}=[1,(b_0,1),(b_1,1),(b_2,1),(b_3,1),\quad\cdots\quad]$$

$\alpha=0$ とする。 $(0:0)=1$ 、$n\geqq 1$ のとき、 $(0:n)=0$ より、 $F(0,\beta:x)=1$

また、 $b_{2k}=\dfrac{-(\beta+2k)}{(\beta+2k)(\beta+2k+1)}x,\quad b_{2k+1}=\dfrac{k+1}{(\beta+2k+1)(\beta+2k+2)}x$

上式に代入して、

$$\frac{1}{F(1,\beta+1:x)}=1+\cfrac{\dfrac{-\beta}{\beta(\beta+1)}x}{1+\cfrac{\dfrac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}x}{1+\cfrac{\dfrac{-(\beta+1)}{(\beta+2)(\beta+3)}x}{1+\cfrac{\dfrac{2}{(\beta+3)(\beta+4)}x}{\ddots}}}}$$

$$=1+\cfrac{\dfrac{-1}{\beta+1}x}{1+\cfrac{\dfrac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}x}{1+\cfrac{\dfrac{-(\beta+1)}{(\beta+2)(\beta+3)}x}{1+\cfrac{\dfrac{2}{(\beta+3)(\beta+4)}x}{\ddots}}}}$$

ここで、連分数の最初の分母・分子に $\beta+1$ をかけて

$$= 1 + \cfrac{-\,x}{\beta+1+\cfrac{\frac{1}{\beta+2}x}{1+\cfrac{\frac{-(\beta+1)}{(\beta+2)(\beta+3)}x}{1+\cfrac{\frac{2}{(\beta+3)(\beta+4)}x}{\ddots}}}}$$

次に、連分数の 2 つ目の分母・分子に $\beta+2$ をかけて

$$= 1 + \cfrac{-\,x}{\beta+1+\cfrac{x}{\beta+2+\cfrac{\frac{-(\beta+1)}{\beta+3}x}{1+\cfrac{\frac{2}{(\beta+3)(\beta+4)}x}{\ddots}}}}$$

さらに、連分数の 3 つ目の分母・分子に $\beta+3$ をかけて

$$= 1 + \cfrac{-\,x}{\beta+1+\cfrac{x}{\beta+2+\cfrac{-\,(\beta+1)x}{\beta+3+\cfrac{\frac{2}{\beta+4}x}{\ddots}}}}$$

くり返して、

$$\frac{1}{F(1,\beta+1:x)} = 1 + \cfrac{-\,x}{\beta+1+\cfrac{x}{\beta+2+\cfrac{-\,(\beta+1)x}{\beta+3+\cfrac{2x}{\ddots}}}}$$

$$= [1,\ (-x,\beta+1),\ (x,\beta+2),\ (-(\beta+1)x,\beta+2),\quad \cdots$$

$$\cdots\quad ,(-(\beta+k)x,\beta+2k+1),\ ((k+1)x,\beta+2k+2),\quad \cdots\cdots\quad]$$

ところで、

$$F(1,1:x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = e^x$$

なので、$\beta = 0$ を代入して

$$\frac{1}{e^x} = 1 + \cfrac{-\,x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{-\,x}{3 + \cfrac{2x}{\ddots}}}}$$

$x = -1$ を代入して

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{-\,1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{-\,2}{\ddots}}}}$$

$$= [1,\ (1,1),\ (-1,2),\ (1,3),\quad \cdots$$
$$\cdots\quad ,(k,2k+1),\ (-(k+1),2k+2),\quad \cdots\cdots\quad]$$

4.3 正則連分数への変形

少し変形する。上の連分数の途中から先を X とおいて、

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{-\,1}{2 + \cfrac{1}{X}}}$$

と置くと

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{-\,X}{2X+1}} = 1 + \frac{2X+1}{X+1} = 2 + \frac{X}{X+1} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{X}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{-\,2}{\ddots}}}$$

$$= [2,\ (1,1),\ (1,3),\ (-2,4),\quad \cdots$$
$$\cdots\quad ,(k,2k+1),\ (-(k+1),2k+2),\ (k+1,2k+3),\quad \cdots\cdots\quad]$$

補題 4.3

$$2k+1+\cfrac{-(k+1)}{2k+2+\cfrac{k+1}{X}}=2k+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{X}}}$$

すなわち、

$$[2k+1,\,(-(k+1),2k+2),\,(k+1,X)]=[2k,1,1,X]$$

証明）

$$左辺=2k+1+\cfrac{-(k+1)}{(k+1)\left(2+\cfrac{1}{X}\right)}=2k+1+\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{X}}=2k+1+\frac{-X}{2X+1}$$

$$2k+\frac{X+1}{2X+1}=2k+\cfrac{1}{\cfrac{2X+1}{X+1}}=2k+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{X+1}{X}}}=2k+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{X}}}\qquad //$$

この補題により、上で得られた e の右下にくる部分は

$$3+\cfrac{-2}{4+\cfrac{2}{5+\cfrac{-3}{\ddots}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{-3}{\ddots}}}}$$

続いて

$$5+\cfrac{-3}{6+\cfrac{3}{7+\cfrac{-4}{\ddots}}}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{-4}{\ddots}}}}$$

以下、同様に繰り返して

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,\quad\cdots\quad]$$

となる。これで、 e の連分数展開が証明された。//

参考文献

[1] Euler 「De fractionibus continius dssertatio」 Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1744 年) p.98-13

[2] M.Wyman and B.Wyman 「An essay on continued fractions」 Math. System Theory 18(1985) P.295-328

[3] Henry Cohn 「A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e 」 Amer.Math.Monthly 113(2006) p.57-62

[4] Joseph Tonien 「A Simple Proof of Euler's Continued Fraction of $e^{1/M}$」 2016 年 The Mathmatical Gazzette 100(548) p.279-287

[5] Wikipedia 「ガウスの連分数」 https://ja.wikipedia.org/wiki/ガウスの連分数)

[6] 中川　仁 (上越教育大学)「円周率の連分数展開について」　2002 年 9 月 27 日　(ネット上で閲覧可能)