p を奇素数とするとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{p(p-1)} k^k$ を p で割った余りについて

2021 年 8 月初旬　片山

2021 年 7 月下旬に、T 高校廊下のホワイトボードに以下の問題が書かれていた。
（N 1先生が生徒に向けて出題されたチャレンジ問題だった）

問題　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} k^k$について

(1) 3 で割った余りを求めよ。

(2) 5 で割った余りを求めよ。

この問題を解くにあたって、次のことがポイントになることに気が付いたので、追加問題として書き加えておいた。

追加問題　p を奇素数とするとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{p(p-1)} k^k$ を p で割った余りを求めよ。

問題 (1)、(2) については、生徒が正解をホワイトボードに書いていった。
追加問題については、あと一歩のところまで迫った解答が書いてあった。その最後には、「これ以降の素晴らしい解答を思いついたのだが、それを書ききるにはお腹がすいて力が出ない。360 日後の人に託す。」と書いてあった。フェルマーの大定理に関して、フェルマーが書き残したことにちなんで書いており、「360 日後の人」というのはフェルマーの 360 年後に大定理が解決されたことから来ているのだろう。なお、彼の解答は、あと、フェルマーの小定理を用いれば解決するところまでいっていた。

追加問題の解答）　余りは $p-1$ である。
以下に示す。

$$\sum_{k=1}^{p(p-1)} k^k = \sum_{l=1}^{p}\sum_{m=1}^{p-1}\{l+(m-1)p\}^{l+(m-1)p} \equiv \sum_{l=1}^{p}\sum_{m=1}^{p-1} l^{l+(m-1)p} \pmod p$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{p-1} 1^{1+(m-1)p} + \sum_{l=2}^{p-1}\sum_{m=1}^{p-1} l^{l+(m-1)p} + \sum_{m=1}^{p-1} p^{p+(m-1)p}$$

(1) $l=1$ のとき

$$\sum_{m=1}^{p-1} 1^{1+(m-1)p} \equiv p-1 \pmod p$$

(2) $2 \leqq l \leqq p-1$ のとき

$\displaystyle\sum_{m=1}^{p-1} l^{l+(m-1)p} = \sum_{m=1}^{p-1} (l^{p-1})^{m-1} \cdot l^{l+(m-1)}$ と変形する。

フェルマーの小定理より、 $l^{p-1} \equiv 1 \quad (1 \leqq l \leqq p-1)$ であるから、

上式 $\displaystyle\equiv \sum_{m=1}^{p-1} l^{l+(m-1)}$。

これを S とおくと、 $lS - S = l^{l+p-1} - l^l, \quad (l-1)S = l^l(l^{p-1}-1)$

フェルマーの小定理より、$(l-1)S \equiv 0 \pmod p$ で $l-1 \not\equiv 0$ であるから　$S \equiv 0$ $\pmod p$

以上により、 $\displaystyle\sum_{m=1}^{p-1} l^{l+(m-1)p} \equiv 0 \pmod p$

(3) $l = p$ のとき

$\displaystyle\sum_{m=1}^{p-1} p^{p+(m-1)p} \equiv 0 \pmod p$

(1),(2),(3) より、$\underline{p \text{ を奇素数とするとき、} \displaystyle\sum_{k=1}^{p(p-1)} k^k \text{ を } p \text{ で割った余りは } p-1 \text{ である。}}$

◎参考　フェルマーの小定理の証明について

$1 \leqq l \leqq p-1$ とする。$l, 2l, \quad \cdots \quad, (p-1)l$ の中から 2 つの項 al, bl をとり、 $al \equiv bl \pmod p$ であるとする。$(a-b)l \equiv 0 \pmod p$ で $-p+2 \leqq a-b \leqq p-2, \quad l \not\equiv 0 \pmod p$ であるから、この式が成り立つのは $a = b$ の時に限られる。

従って、 $l, 2l, \quad \cdots \quad, (p-1)l$ を p で割った余りはすべて異なることになり、その個数は $p-1$ であるから、$1, 2, \quad \cdots \quad, p-1$ を並び変えたものになるといえる。

よって、 すべてを掛け合わせると、 $l \cdot 2l \cdot \quad \cdots \quad \cdot (p-1)l \equiv 1 \cdot 2 \cdot \quad \cdots \quad \cdot (p-1)$
$(p-1)! \cdot l^{p-1} \equiv (p-1)!$ 。　このとき、 $(p-1)! \not\equiv 0$ より、$l^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ //

◎参考　$p = 5$ について

$$\sum_{k=1}^{20} k^k = (1^1 + 6^1 + 11^{11} + 16^{16}) + (2^2 + 7^7 + 12^{12} + 17^{17}) + (3^3 + 8^8 + 13^{13} + 18^{18})$$
$$+ (4^4 + 9^9 + 14^{14} + 19^{19}) + (5^5 + 10^{10} + 15^{15} + 20^{20})$$

- $1^1 + 6^1 + 11^{11} + 16^{16} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
- $2^2 + 7^7 + 12^{12} + 17^{17} \equiv 2^2 + 2^7 + 2^{12} + 2^{17}$

  ここで、$2^2 \equiv 4, 2^3 = 8 \equiv 3, 2^4 \equiv 6 \equiv 1$ となる。

  $2^4 \equiv 1$ を用いて上式を計算すると

  $\equiv 2^2 + 2^3 + 2^0 + 2^1 = 4 + 8 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod 5$

- 同様に、 $3^4 \equiv 1, 4^2 \equiv 1 \pmod 5$ を用いて計算すると、
  $3^3 + 8^8 + 13^{13} + 18^{18} \equiv 0, \quad 4^4 + 9^9 + 14^{14} + 19^{19} \equiv 0 \pmod 5$ となる。
- $5^5 + 10^{10} + 15^{15} + 20^{20} \equiv 0 \pmod 5$

以上より、 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^k$ を5で割った余りは4である。

※　$p = 5$ のときの上記の計算を一般の奇素数 p について行ったのが最初に述べた証明である。

※　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} k^k$ を3で割った余りや、5で割った余りは、$\displaystyle\sum_{k=1}^{p(p-1)} k^k$ を p で割った余りが $p-1$ となることを用いて計算できる。