連分数について

夏休みの課題をきちんとやり終えて、時間に余裕のある人のために

2021年7月　片山

1　連分数の記号について

$a, b, c, \cdots$ を正の数とする。自然数とする場合が多いが、そうでない正の数も使うことがある。

このとき、

$$a+\frac{1}{b}, \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}, \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$$

のような形の分数を 連分数 と呼ぶ。（厳密には、正則連分数という）

連分数は、書くのにスペースが必要になるので、以下のように書き表す記号を導入する。

$$a+\frac{1}{b}=[a,\, b], \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=[a,\, b,\, c], \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=[a,\, b,\, c,\, d]$$

例 1

(1) 有理数 $\dfrac{7}{5}$ について

- $\dfrac{7}{5}$ の整数部分は $\left[\dfrac{7}{5}\right]=1$ であるから、

$$\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=\left[1,\, \frac{5}{2}\right]$$

- 上で $\dfrac{5}{2}$ の整数部分は $\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$ であるから、

$$\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}, \qquad \therefore \frac{7}{5}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=[1,2,2]$$

(2) 連分数記号で $[1,\, 2,\, 3]$ と表される数について

$$[1,\, 2,\, 3]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$$

練習１

(1) $\dfrac{17}{12}$ を連分数記号で表せ。

答え　$[1,2,2,2]$

(2) 連分数記号で [3, 4, 5] と表される数を求めよ。

答え　$\dfrac{68}{21}$

2　$\sqrt{n}$ の連分数について

チャート式数学Ｉ＋Ａの 46 ページに、 $\sqrt{2}$ の連分数に関するコラムがある。ここでは、先に導入した記号を用いて書いていくことにする。

2.1　$\sqrt{2}$ の連分数展開

(1) $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 、小数部分は $\sqrt{2}-1$ であるから、 $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=[1,\sqrt{2}+1]$

(2) ここで $\sqrt{2}+1=2+(\sqrt{2}-1)$ となるが、$(\sqrt{2}-1)$ のところは (1) と同様に計算できるので $\sqrt{2}+1=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=[2,\sqrt{2}+1]$

従って、$\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=[1,2,\sqrt{2}+1]$

さらに繰り返して、

$$\sqrt{2}=[1,2,2,\sqrt{2}+1]=[1,2,2,2,\sqrt{2}+1]=\cdots\cdots$$

限りなく繰り返すことにより、（厳密には「収束」について確認が必要だが）

$$\sqrt{2}=[1,2,2,2,2,\quad\cdots\quad]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

注意　第２項からは２が続く。小数と同様に、「２が循環する」という。そして、以下のような記号で書き表すこととする

$$\sqrt{2}=[1,\dot{2}]$$

$\sqrt{2}$ は、小数で表すと 1.41421356　$\cdots$ で規則性の無い数の並びになっているが、連分数にするときれいになっている。

2.2 $\sqrt{3}$ の連分数展開

(1) $\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$

$= \left[1, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$

(2) $\dfrac{1+1}{2} < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} < \dfrac{2+1}{2}$ より、$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ の整数部分は 1 である。

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

$= [1, \sqrt{3}+1]$

よって、 $\sqrt{3} = [1, 1, \sqrt{3}+1]$

(3) $\sqrt{3} + 1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)$ であるが、この小数部分は (1) と同じである。従って、

$\sqrt{3} + 1 = \left[2, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$ であり、(2) の結果に代入して

$\sqrt{3} = \left[1, 1, 2, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$

(4) (3) の結果に (2)(3) の考察を代入すると、

$\sqrt{3} = \left[1, 1, 2, 1, 2, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right] = \left[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right] = \quad \cdots$

限りなく繰り返すと、

$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \quad \cdots \quad]$

第 2 項から 1,2 を繰り返すので、それを循環節として、

$\sqrt{3} = [1, \dot{1}, \dot{2}]$

2.3 その他の $\sqrt{n}$ の連分数展開について

同様な計算を行うと、$\sqrt{5} = [2, \dot{4}], \quad \sqrt{6} = [2, \dot{2}, \dot{4}]$ となる。

課題１

(1) $\sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \quad \cdots$ について、連分数展開を求めてみよ。

(2) プログラムを作成できる人は、$\sqrt{99}$ まで連分数展開を求めてみよ。

(3) 得られた連分数展開のリストから、何か規則がみつからないか考えてみよ。

定義　連分数の循環節の長さ

$\sqrt{2}=[1,\dot{2}]$, $\sqrt{5}=[2,\dot{4}]$ は、第 2 項から先が同じ数字となる。このとき、「循環節の長さは 1 である」という。

$\sqrt{3}=[1,\dot{1},\dot{2}]$, $\sqrt{6}=[2,\dot{2},\dot{4}]$ は、第 2 項から先が 2 桁の数字が繰り返している。このとき、「循環節の長さは 2 である」という。

課題 2

(1) 循環節の長さが 1 となるのは n がどんな条件を満たすときか。その他、循環節の長さと n の間に何か関係があるのか考えよ。

(2) $\sqrt{n}$ の連分数展開は必ず循環するのか？もし、そうならば、その理由を述べよ。

(3) 必ず第 2 項から循環するのか。（第 3 項以降から循環を開始する $\sqrt{n}$ はないのか？）もし、そうなら、どうしてか説明せよ。

2.4　円周率 π の連分数展開

ここでは、$\pi \fallingdotseq 3.1415926536$ とわかっていることから始める。そして、表計算ソフトで計算していく。

(1) $\pi=3+0.1415926536=3+\dfrac{1}{0.1415926536}=\left[3,\dfrac{1}{0.1415926536}\right]$

(2) $\dfrac{1}{0.1415926536}=7.0625133054=7+\dfrac{1}{0.0625133054}$

よって、$\pi=\left[3,7,\dfrac{1}{0.0625133054}\right]$

(3) 以下同様にして、 $\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,4,\quad\cdots\quad]$ となる。

課題 3　円周率 π の連分数展開について、何か規則があるか。

上で計算した連分数展開を途中で止めた $[3,7,15]$ を通常の分数で表すと

$3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15}}=3+\dfrac{15}{106}=\dfrac{333}{106}=3.141509434$　という風に、π に近い有理数を得る。

いい夏休みを過ごしてください。