空間におけるチェバの定理の類似について

2021 年 6 月
片山　喜美

N 君から、2021 年前期大阪大学入試問題　第 2 問について「ベクトルでは無く幾何ではどのように解きますか？」という質問をもらった。普通にはベクトルの問題で、幾何で解こうとは思いもしなかった。

どうすれば良いのか、あれこれ試行錯誤している内に、ふと思いが巡った。「まさかそんなことが成り立つなんてことがありはしないよな」、と思いながらも試しに適用してみたら、ベクトルで計算したのと同じ答えがちゃんと出てきた。「こんなことが成り立つのか」と思ったのが次のきれいな式である。

定理

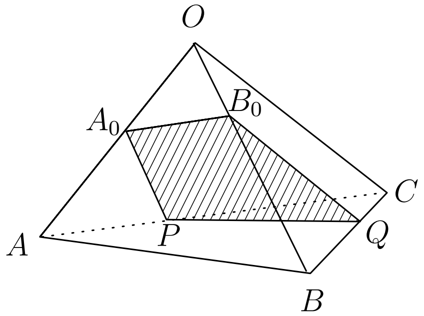
四面体 $OABC$ の辺 OA 上に点 A_0 、辺 OB 上に点 B_0 、辺 AC 上に点 P 、辺 BC 上に点 Q をとる。ただし、 4 点とも四面体の頂点とは異なるものとする。

4 点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{OA_0}{A_0A}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BB_0}{B_0O}=1$$

この定理の証明は後回しにする。

この定理を用いると、2021 年前期大阪大学入試問題　第 2 問（1）を解くことができる。



2021 年前期大阪大学入試問題　第 2 問

空間内に、同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある。 s, t を $0<s<1,\ 0<t<1$ をみたす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 、線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0、線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P 、線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに、4 点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1,\quad \left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=2,\quad \angle AOB=120^\circ,\quad \angle BOC=90^\circ,\quad \angle COA=60^\circ,\quad \angle POQ=90^\circ$ であるとき、 s の値を求めよ。

（1）の標準的な解答は、空間ベクトルを用いて、

・ $BQ:QC=t:1-t$ より

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

と表したものと

・点 Q は平面 A_0B_0P 上にあることから

$$\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA_0}+\beta\overrightarrow{OB_0}+\gamma\overrightarrow{OP} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=1)$$

と表したものを比較するものだろう。そこそこの計算が必要である。

<u>定理を用いた解答</u>

$$\frac{OA_0}{A_0A}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BB_0}{B_0O}=1$$

より

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{s}{1-s}\cdot\frac{1-t}{t}\cdot\frac{2}{1}=1, \qquad 2s(1-t)=(1-s)t, \qquad 2s=(1+s)t, \qquad \therefore\ t=\frac{2s}{1+s}$$

定理を認めるとこのように、あっという間に終わってしまう。ただし、大学入試の解答として一般的では無い。

この式に思いが至ったのは、どうやったらベクトルで無い解答ができるか考えているうちに、$OA_0:A_0=1:1$, $OB_0:B_0B=1:2$ のところを $OA_0:A_0=k:1-k$, $OB_0:B_0B=l:1-l$ というように一般の比率にして、4 点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるときに成り立つことは何だろうかと考えてからであった。点 O から出発して分点がある辺を進んでいくと再び点 O に戻ることから、チェバの定理を思い起こしたのであった。上記の大阪大学の問題で正解が出てくることから、成り立つことを確信して、定理の証明を試みた。大阪大学の問題をベクトルで解く方法をそのまま適用するのである。

定理の証明（ベクトルを用いた方法）・ $BQ:QC=t:1-t$ より

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC} \qquad \cdots \quad ①$$

・点 Q は平面 A_0B_0P 上にあることから

$$\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA_0}+\beta\overrightarrow{OB_0}+\gamma\overrightarrow{OP} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=1)$$

ここで

$$\overrightarrow{OA_0}=k\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_0}=l\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OQ}=\alpha k\overrightarrow{OA}+\beta l\overrightarrow{OB}+\gamma\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}\}$$

$$=\{\alpha k+\gamma(1-s)\}\overrightarrow{OA}+\beta l\overrightarrow{OB}+\gamma s\overrightarrow{OC} \qquad \cdots \quad ②$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} \alpha k + \gamma(1-s) &= 0 \cdots ③ \\ \beta l &= 1-t \cdots ④ \\ \gamma s &= t \cdots ⑤ \end{cases}$$

この連立方程式から α, β, γ を消去していく。

④ より $\beta = \dfrac{1-t}{l}$,　⑤ より、 $\gamma = \dfrac{t}{s}$

③ に代入して $\alpha k + \dfrac{t}{s}(1-s) = 0$,　$\alpha = -\dfrac{t(1-s)}{ks}$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ より、 $-\dfrac{t(1-s)}{ks} + \dfrac{1-t}{l} + \dfrac{t}{s} = 1$

t について解く。両辺に ksl を掛けて $-lt(1-t) + ks(1-t) + klt = ksl$

$\{-l(1-s) - ks + kl\}t + ks = ksl$,　$\{(l-k)s - (1-k)ll\}t = ks(1-l)$

従って、$t = \dfrac{ks(1-l)}{(k-l)s + (1-k)l}$

$$1 - t = \frac{(k-l)s + (1-k)l - ks(1-l)}{(k-l)s + (1-k)l} = \frac{(-s + (1-k) + ks)l}{(k-l)s + (1-k)l} = \frac{(1-k)(1-s)l}{(k-l)s + (1-k)l}$$

$$\frac{1-t}{t} = \frac{(1-k)(1-s)l}{ks(1-l)}, \qquad \therefore \frac{k}{1-k} \cdot \frac{s}{1-s} \cdot \frac{1-t}{t} \cdot \frac{1-l}{l} = 1$$

（証明終)

このようなきれいな成り立つことに気がついたのはうれしいことであった。もちろん、有名な定理なのであろうが、これまで知らなかった。今回の大阪大学の入試問題に関して、大手予備校の解答速報や受験月刊誌の解答例には載ってなかったように思う。（詳細に確認したわけではない）ただ、この定理を用いた解答は大学入試の解答としてはふさわしいものでは無いと思う。

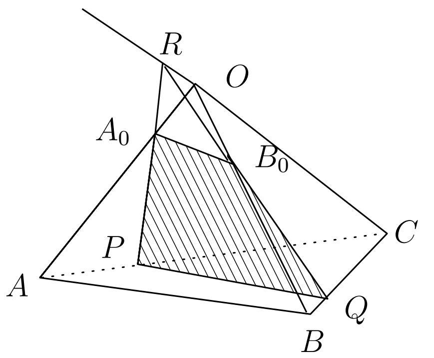
上記について、6 月初旬に手書きで作成したレポートを勤務する高校の先生方に配った。その際、「この定理について、上記のベクトルによる証明は余り美しくない。相似などを用いた証明があるに違い無い。」とコメントしたところ、多賀誠志先生からネット上に「空間におけるメネラウスの定理」について記載したページがあると教えてもらった。そこにある記載内容を用いると、大阪大学の入試問題について、数学 A の範囲で解答を作ることができる。

2021 年前期大阪大学　第 2 問（1）の平面幾何を用いた解法

- 平面 A_0B_0QP と辺 OC が平行で無いとき

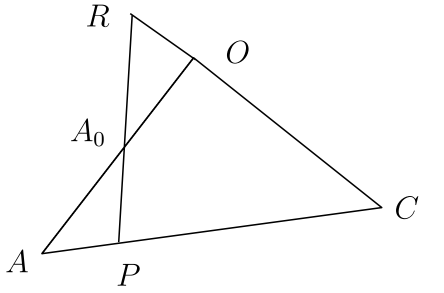
  平面 A_0B_0QP と辺 OC は交点をもつ。それを R とすると、

  - 直線 A_0P は平面 A_0B_0PQ および平面 OAC のいずれにも含まれている。すなわち、直線 A_0P は平面 A_0B_0PQ と平面 OAC の交線である。
  - 直線 B_0Q は平面 A_0B_0PQ および平面 OBC のいずれにも含まれている。すなわち、直線 B_0Q は平面 A_0B_0PQ と平面 OBC の交線である。
  - OC は平面 OAC と平面 OBC の交線である。

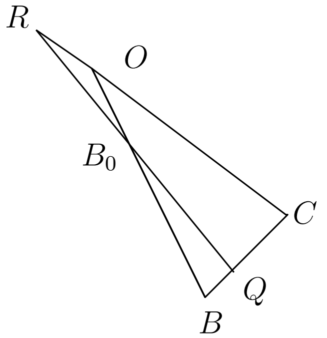


以上から、直線 A_0P と 直線 B_0Q は点 R で交わる。

$\triangle\, OAC$ に関するメネラウスの定理より、 $\dfrac{OA_0}{A_0A}\cdot\dfrac{AP}{PC}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1 \qquad \dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{s}{1-s}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1$



$\triangle\, OBC$ に関するメネラウスの定理より、 $\dfrac{OB_0}{B_0B}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1 \qquad \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{1-t}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1$



以上より、 $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{s}{1-s}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{1-t} \qquad 2s(1-t)=(1-s)t \qquad 2s=(s+1)t$

よって、 $t=\dfrac{2s}{s+1}$

- 平面 A_0B_0QP と辺 OC が平行であるとき

  $AP:PC=AA_0:A_0O=1:1, \quad \therefore s=\dfrac{1}{2}$

  $BQ:QC=BB_0:B_0O=2:1, \quad \therefore t=\dfrac{2}{3}$

  このとき、 $t=\dfrac{2s}{s+1}$ が成り立っている。

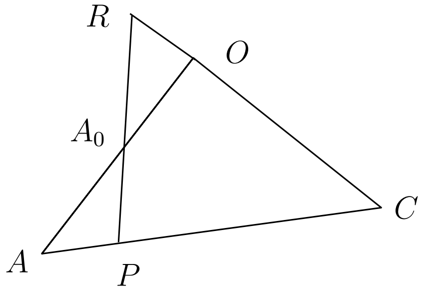
以上より、 $\underline{t=\dfrac{2s}{s+1}}$

これは、数学 A の範囲での解答であると言えるだろう。ただし、高校の授業で扱うことを薦めるものではない。

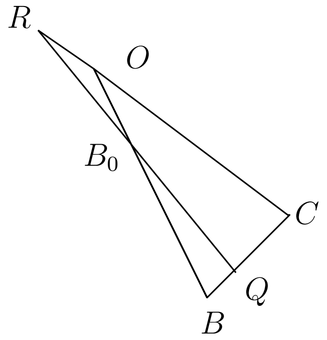
注意.　一般に、$OA_0 : A_0A = k : 1-k, \quad OB_0 : B_0B = l : 1-l$ とする。

直線 AA_0 と直線 BB_0 が交点を持つとき、

$\triangle\, OAC$ に関するメネラウスの定理より、 $\dfrac{OA_0}{A_0A}\cdot\dfrac{AP}{PC}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1 \qquad \dfrac{k}{1-k}\cdot\dfrac{s}{1-s}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1$



$\triangle\, OBC$ に関するメネラウスの定理より、 $\dfrac{OB_0}{B_0B}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1 \qquad \dfrac{l}{1-l}\cdot\dfrac{t}{1-t}\cdot\dfrac{CR}{RO}=1$



以上より、 $\dfrac{k}{1-k}\cdot\dfrac{s}{1-s}=\dfrac{l}{1-l}\cdot\dfrac{t}{1-t} \qquad \dfrac{k}{1-k}\cdot\dfrac{s}{1-s}\cdot\dfrac{1-l}{l}\cdot\dfrac{1-t}{t}=1$

すなわち、 定理の式 $\dfrac{OA_0}{A_0A}\cdot\dfrac{AP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QB}\cdot\dfrac{BB_0}{B_0O}=1$ が成り立つ。直線 AA_0 と直線 BB_0 が交点を持たないときは、$OA_0 : A_0A = CP : PA, \quad OB_0 : B_0B = CQ : QB$ から定理の式が成り立つことがわかる。

追記.　7月初旬に、安田亨先生の入試問題解答集を購入したと多賀誠志先生が見せてくれた。確認したところ、大阪大学の該当の問題に対して、この定理を用いた解答が参考として掲載されていた。さすがである。