

ディオファントス近似と大学入試問題について

2021年4月～5月

片山 喜美

2021年3月下旬に、N君から「2011年前期大学入試の大阪大学理系 第4問」について、作問の背景に関する質問をもらった。作問の背景に関して僕が思ったことを返信し、加えて「入試問題の証明に用いる手法は、ディオファントス近似のあたりで用いられるものに通じると思う。」といった旨を伝えた。すると、N君から「類似した問題として2015年前期京都大学理系の第5問があります」というメールが来た。さらに、「ディオファントス近似の形の不等式を扱った問題として、2017年前期大阪大学理系の第3問があります」という知らせがあった。

この機会に、ディオファントス近似やそれに関連した連分数展開について少し整理してみることにした。

1 実数を有理数で近似することについて

実数 A に対して、それに近い有理数を考えていく。すなわち有理数による実数 A の近似を考えるのである。簡単のため $A > 0$ とする。 $A < 0$ については、少し調整する(例えば、自然数 N を加えて $A + N > 0$ とする)だけで同じことがいえる。

近似の精度を上げるためには、分母が大きな有理数を使うと良いと考えられる。

- 例えば $\sqrt{2} = 1.414\dots$ については、その小数部分に着目して

$$\frac{a_0}{b_0} = 1 = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = 1.4 = \frac{14}{10}, \quad \frac{a_2}{b_2} = 1.41 = \frac{141}{100}, \quad \frac{a_3}{b_3} = 1.414 = \frac{1414}{1000}, \quad \dots$$

を考えるのが1つの方法である。このとき、

$$\sqrt{2} - \frac{a_0}{b_0} = 0.414\dots < \frac{1}{1}, \quad \sqrt{2} - \frac{a_1}{b_1} = 0.014\dots < \frac{1}{10},$$

$$\sqrt{2} - \frac{a_2}{b_2} = 0.004\dots < \frac{1}{100}, \quad \sqrt{2} - \frac{a_3}{b_3} < \frac{1}{1000}, \quad \dots$$

であるから、

$$0 < \left| \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n} \text{ を満たす。}$$

- $A = \frac{17}{12} = 1.4166\dots$ について

$$\frac{a_0}{b_0} = 1 = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = 1.4 = \frac{14}{10}, \quad \frac{a_2}{b_2} = 1.41 = \frac{141}{100}, \quad \frac{a_3}{b_3} = 1.416 = \frac{1416}{1000}, \quad \dots$$

となる。このとき、

$$A - \frac{a_0}{b_0} = 0.416\cdots < \frac{1}{1}, \quad A - \frac{a_1}{b_1} = 0.016\cdots < \frac{1}{10},$$

$$A - \frac{a_2}{b_2} = 0.006\cdots < \frac{1}{100}, \quad A - \frac{a_3}{b_3} < \frac{1}{1000}, \quad \cdots$$

であるから、

$$0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n} \text{ を満たす。}$$

- $A = \frac{71}{50} = 1.42$ (有限小数) について

$$\frac{a_0}{b_0} = 1 = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = 1.4 = \frac{14}{10}, \quad \frac{a_2}{b_2} = 1.42 = \frac{142}{100}, \quad \frac{a_3}{b_3} = 1.420 = \frac{1420}{1000}, \quad \cdots$$

となる。このとき、

$$A - \frac{a_0}{b_0} = 0.42\cdots < \frac{1}{1}, \quad A - \frac{a_1}{b_1} = 0.02\cdots < \frac{1}{10},$$

$$A - \frac{a_2}{b_2} = 0, \quad A - \frac{a_3}{b_3} = 0, \quad \cdots$$

であるから、

$0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n}$ の左の不等号が $n = 2, 3, \dots$ では成り立たず、等号になってしまう。すなわち、有限小数になる有理数 A について小数点に着目した近似分数の作り方では、途中でから近似というより、 A そのものになってしまうのである。

では、 $0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n}$ を満たす有理数の列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ を作ることはできないのであろうか？ それについて、少し考えてみる。

$$0 < \left| \frac{71}{50} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n} \text{ の両辺に } 50b_n \text{ を掛けて } 0 < |71b_n - 50a_n| < 50$$

$\gcd(71, 50) = 1$ であるから、一次不定方程式 $71x - 50y = 1$ は整数解を持つ。

その特殊解は、 $x = -19, y = 27$ である。(筆算での計算の仕方については、少し下にその様子をメモしておく。)

$$\text{一般解は、 } x = -19 + 50n, \quad y = 27 + 71n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

従って、 $a_n = 27 + 71n, \quad b_n = -19 + 50n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと、

$$71b_n - 50a_n = 1 \quad \text{両辺を } 50b_n \text{ で割って、 } \frac{71}{50} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{50b_n} < \frac{1}{b_n}$$

$$\text{従って、 } 0 < \left| \frac{71}{50} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n} \quad (0 < b_1 < b_2 < \dots)$$

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{27}{-19}, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{98}{31}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{169}{81}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{27 + 71n}{-19 + 50n}, \quad \dots$$

【参考】 $71x + 50y = 1$ の特殊解の計算方法（左の互除法を下まで行ったら、右に下から上に向かって計算している。詳細略）

	71	50			-19	27
			(1			-19
					-19	8
2)		42				16
					-3	8
			(2			-6
					-3	2
1)						2
					-1	2
			(1			-1
					-1	1
1)						
						1

参考:「不定方程式 $ax + by = d$ の特殊解の簡単な求め方について」(2013年 片山)
<http://ja9nfo.web.fc2.com/math/special-sol.pdf>

一般の正の有理数 $A = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $\gcd(a, b) = 1$) について、一次不定方程式 $bx - ay = 1$ は、一般解 $x = x_0 + an, y = y_0 + bn$ ($n \in \mathbb{Z}$, $0 < x_1 < x_2 < \dots$) を持つ。
 $a_n = y_0 + an, b_n = x_0 + an$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) として $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ を考えると次の定理が成り立つ。

定理 1 正の有理数 $A = \frac{a}{b}$ (a, b は自然数 $\gcd(a, b) = 1$) に対して、

$$0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{b_n} \quad (c \text{ は正の定数 } 0 < b_1 < b_2 < \dots)$$

を満たす有理数無限数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ が存在する。

さて、もっと精度の高い近似有理数列をつくることができるだろうか？
 例えば、 $0 < \left| \frac{71}{50} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{b_n^2}$ (c は正の定数、 $0 < b_1 < b_2 < \dots$) のように、誤差が分母 b_n^2 の分数で押さえられるような有理数の列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ を作ることができるかについて考える。

上式の両辺に $50b_n$ を掛けて、 $0 < |71b_n - 50a_n| < \frac{50c}{b_n}$ ($0 < b_1 < b_2 < \dots$)

このとき、 $\{b_n\}$ は増加する自然数の列であるから、あるところから $50c < b_n$ となり、 $0 < \left| \frac{50c}{b_n} \right| < 1$ を満たす。

しかるに、 $|71b_n - 50a_n|$ は 0 以上の整数なので、0 より大きく 1 より小さくなることはできない。

$\therefore 0 < \left| \frac{71}{50} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{b_n^2}$ (c は正の定数、 $0 < b_1 < b_2 < \dots$) のように、誤差が分母 b_n^2 の分数で押さえられるような有理数の列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ を作ることはできない。

$A = \frac{71}{50}$ に限らず、一般の正の有理数 $A = \frac{a}{b}$ (a, b は自然数、 $\gcd(a, b) = 1$ についても同様なことがいえる。整理して以下の定理を得る。

定理 2

(1) 正の有理数 $A = \frac{a}{b}$ (a, b は自然数 $\gcd(a, b) = 1$) に対して、

$$(i) \quad 0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{b_n^2}$$

(c は正の定数、 $\gcd(a_n, b_n) = 1$ 、 $0 < b_1 < b_2 < \dots$)

を満たす有理数無限数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ は存在しない。

$$(ii) \quad \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{b_n^2}$$

(c は正の定数、 $\gcd(a_n, b_n) = 1$ 、 $0 < b_1 < b_2 < \dots$)

を満たす有理数無限数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ が存在したとすると、ある自然数 N より大きなすべての自然数 n について、 $\frac{a_n}{b_n} = A$ が成り立つ。

(2) 正の実数 A について

$$0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{b_n^2}$$

(c は正の定数、 $\gcd(a_n, b_n) = 1$ 、 $0 < b_1 < b_2 < \dots$)

を満たす有理数無限数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ が存在するならば、 A は無理数である。

ここまでは、正の実数 A とその近似有理数の誤差を有理数の分母で $\frac{c}{b_n}$ や $\frac{c}{b_n^2}$ で押さえられるか考えた。

もう少し一般に

$$0 < \left| A - \frac{a_n}{b_n} \right| < f(b_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$$

を満たす有理数の列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ を考えることを「ディオファントス近似」と呼ぶ。
 これが「良い近似」、すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n f(b_n) = 0$ となる場合、実数 A は無理数となると
 言える。証明は、上で $\frac{c}{b_n^2}$ で考えたものをすべて、 $f(b_n)$ で置き換えればよい。

2 2011 年前期 大阪大学入試問題 理系 第4問について

問題は以下のとおりである。

2011 年前期 大阪大学 理系

4. a, b, c を正の定数とし、 x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。以下、定数はすべて実数とする。

(1) 定数 p, q に対し、次をみたす定数 r が存在することを示せ。

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

(2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて、次をみたす定数 k, l が存在することを示せ。

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数 n に対して $\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であったとする。このとき関数 $f(x)$ は自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ。

この問題をどのような考えで作ったのかについては、

「 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は正の定数) について、たまたまいくつかの自然数 n のときに、 $f(n)$ が自然数の立方数になることは、あるだろう。例えば、 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$ は、 $f(1) = 8 = 2^3$ となる。

では、すべての自然数 n について $f(n)$ が自然数の立方数になる条件は何か？それは、 $f(x)$ が式として1次式の3乗になるしかないだろう。」

ということを示すことを題材にしたのかもしれない。それを段階的に示させていったのがこの入試問題だと思われる。

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に近い3乗の式として $\left(x + \frac{a}{3}\right)^3$ を考える。

$$f(x) - \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \frac{a^3}{27} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

と差は1次式にできる。ここで、 $\alpha^3 - \beta^3 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^3$ より、

$$f(x) - \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = \left\{ \sqrt[3]{f(x)} - \left(x + \frac{a}{3}\right) \right\} \left\{ \sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)} \left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 \right\} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

①, ② より、

$$\sqrt[3]{f(x)} - \left(x + \frac{a}{3}\right) = \frac{\left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \frac{a^3}{27}}{\sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2}$$

$$\therefore \left|\sqrt[3]{f(x)} - \left(x + \frac{a}{3}\right)\right| = \frac{\left|\left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \frac{a^3}{27}\right|}{\sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2} \quad (x \geq 1)$$

$\frac{1}{2}r$ を $\left|b - \frac{a^2}{3}\right|$ および $\left|c - \frac{a^3}{27}\right|$ より大きな数にとれば、 $x \geq 1$ のとき、

$$\text{右辺の分子} \leq \left|b - \frac{a^2}{3}\right|x + \left|c - \frac{a^3}{27}\right| \leq \frac{1}{2}rx + \frac{1}{2}rx = rx$$

また、右辺の分母 $\geq x^2$ であるから

$$\left|\sqrt[3]{f(x)} - \left(x + \frac{a}{3}\right)\right| \leq \frac{rx}{x^2} = \frac{r}{x} \quad (x \geq 1) \quad \therefore \left|\sqrt[3]{f(n)} - \left(n + \frac{a}{3}\right)\right| \leq \frac{r}{n}$$

$g(n) = \sqrt[3]{f(n)} - n$ とおくと、 $f(n)$ が自然数の立方数のとき $g(n)$ は整数であり、

$$\left|g(n) - \frac{a}{3}\right| \leq \frac{r}{n} \quad \therefore |3g(n) - a| \leq \frac{3r}{n}$$

$n > 3r$ となるような大きな自然数 n については、 $|3g(n) - a| \leq \frac{3r}{n} < 1$ であり、 $|3g(n) - a|$ は 0 以上の整数であるから、 $3g(n) = a$ が成り立つ。従って、 $a = 3m$ ($m \in \mathbb{N}$) と置くことができ、 $g(n) = m$, $\sqrt[3]{f(n)} - n = m$ となる。この式から $f(n) = (n + m)^3$ が導かれる。

すると、1 次方程式 $f(x) - (x + m)^3 = (b - 3m^2)x + c - m^3 = 0$ が無数の解 $x = n$ (n は $3r$ より大きなすべての自然数) を持つことになるので、恒等的に 0 とならなければいけない。

$$\therefore f(x) = (x + m)^3 \quad (m \in \mathbb{N}) \quad \text{以上により、先の主張が示された。}$$

注意 「 $|3g(n) - a| \leq \frac{3r}{n}$ ($g(n)$ は自然数) であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3r}{n} = 0$ であることから、ある自然数 N より大きなすべての自然数 n について、 $g(n) = \frac{a}{3}$ となる」というところが、定理 2 の (1)(ii) とよく似た考え方である。

3 2015 年前期 京都大学理系 第 5 問について

問題は以下のとおりである。

5. a, b, c, d, e を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(x) = dx + e$$

を考える。すべての正に整数 n に対して、 $\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき、 $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

前の大阪大学の問題と同様に「すべての自然数 n に対して、 $\frac{f(n)}{g(n)}$ が整数となるようならば、式として $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れているのだろう」ということを題材にしたものだろう。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{a}{d}x + \frac{bd - ae}{d^2} + \frac{c - \frac{(bd - ae)e}{d}}{dx + e} = px + q + \frac{r}{dx + e}$$

とする。

$$\frac{f(n)}{g(n)} = pn + q + \frac{r}{dn + e} = l \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)} = p(n+1) + q + \frac{r}{d(n+1) + e} = m \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

(l, m は整数) とおく。② - ① より、

$$p + \frac{r}{d(n+1) + e} - \frac{r}{dn + e} = m - l$$

$$p - \frac{rd}{\{d(n+1) + e\}(dn + e)} = m - l$$

$p = [p] + s$ ($[p]$ は p を超えない最大の整数、 $0 \leq s < 1$) とすると

$$s - \frac{rd}{\{d(n+1) + e\}(dn + e)} = m - l - [p]$$

この式で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rd}{\{d(n+1) + e\}(dn + e)} = 0$ であり、一方、右辺は整数であることから、 $s = 0, d = 0$ が従う。

$$\therefore \frac{f(x)}{g(x)} = px + q$$

ここで、 $s = 0$ より、 $p = [p]$ 。よって、 p は整数。また、 $q = \frac{f(0)}{g(0)}$ より q も整数。

注意 $s - \frac{rd}{\{d(n+1) + e\}(dn + e)} = m - l - [p]$ として、左辺の第2項の分数が0に近づく一方、右辺が整数であることから考えるのは、やはり、定理2の(1)(ii)と似た考え方である。

4 ネイピア数 e が無理数であることについて

定理2の(2)を適用して、次の定理を示すことができる。

定理3 ネイピア数 $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ は無理数である。

証明) $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ とおく。

$$\begin{aligned} 0 < e - c_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = \frac{2}{(n+1)!} \end{aligned}$$

もし、 e が有理数であったとすれば、 $e = \frac{a}{b}$ a, b は自然数、 $\gcd(a, b) = 1$ と表される。

$$0 < \frac{a}{b} - c_n < \frac{2}{(n+1)!}$$

の両辺に $b \cdot n!$ を掛けて

$$0 < a \cdot n! - b \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{2b}{n+1}$$

この不等式で、 $\frac{n!}{k!} = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (k+1)$ なので、中辺は整数である。
その一方で、右辺は $n \geq 2b$ のときに1より小さくなる。これは矛盾である。
 $\therefore e$ は無理数である。//

注意1 円周率 π についても同様な手法で無理数であることが証明できる。ただし、ある多項式を用いていくため、 e に比べると結構複雑な証明となる。

注意2 無理数にも複雑さの面から段階がある。例えば、 $\sqrt{2}$ は方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解であるし、 $\sqrt[3]{2}$ は方程式 $x^3 - 2 = 0$ の解である。満たす方程式の次数から $\sqrt{2}$ よりも $\sqrt[3]{2}$ の方が複雑であると言える。これらのように、整数を係数とする n 次方程式の解となるような無理数については、次数 n によって複雑さを表すことになる。一方、ネイピア数 e や円周率 π は整数を係数とする方程式の解とはなり得ない。そういう無理数のことを「超越数」と呼ぶ。ネイピア数 e や円周率 π が超越数であることについての証明は、「数学 III、C についてのメモ」(1998年富山県高等学校教育研究会数学部会発表資料)に記載している。(http://ja9nfo.web.fc2.com/ の数学の資料のページから閲覧可能) これは、学生時代に村瀬元彦先生による数学演習の時間に教わったものである。

5 連分数を用いた有理数の近似について

(1) 有理数 $\frac{7}{5}$ について

- $\frac{7}{5}$ の整数部分は $\left[\frac{7}{5} \right] = 1$ であるから、

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}$$

- 上の第2項の分母の $\frac{5}{2}$ の整数部分は $\left[\frac{5}{2} \right] = 2$ であるから、

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}, \quad \therefore = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

(2) 有理数 $\frac{17}{12}$ について

- $\frac{17}{12}$ の整数部分は $\left[\frac{17}{12} \right] = 1$ であるから、

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}}$$

- $\frac{12}{5}$ の整数部分は $\left[\frac{12}{5} \right] = 2$ であるから、

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

- 従って、

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

定義 1 次の形を有限連分数という。

$$k_0 + \frac{a_1}{k_1 + \frac{a_2}{k_2 + \frac{a_3}{\dots + \frac{a_n}{k_n}}}}$$

これを以下のようにコンパクトな形でも表す。

$$k_0 + \frac{a_1}{k_1 + \frac{a_2}{k_2 + \dots + \frac{a_n}{k_n}}}$$

有限連分数で、 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ であるものを正則有限連分数という。

定理 4 任意の有理数 $\frac{a}{b}$ (a, b は自然数、 $\gcd(a, b) = 1$) は有限な正則連分数に変形することができる。

証明) ユークリッドの互除法を用いる。

まず、 $a_0 = a, a_1 = b$ とする。このとき、割り算により、

$$a_0 = k_0 a_1 + a_2, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_2 < a_1) \text{ とできる。} \quad A = \frac{a_0}{a_1} = \frac{k_0 a_1 + a_2}{a_1} = k_0 + \frac{a_2}{a_1}$$

(1) $a_2 = 0$ のとき

$A = k_0$ で終わり。

(2) $a_2 \neq 0$ のとき

$$A = k_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}}$$

このとき、 $a_1 = k_1 a_2 + a_3, \quad (k_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq a_3 < a_2)$ とできる。

$$\text{従って、} \frac{a_1}{a_2} = \frac{k_1 a_2 + a_3}{a_2} = k_1 + \frac{a_3}{a_2}$$

$$A = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{a_2}{a_3}}$$

以下同様に、 a_l まで決定できたとき、 $a_{l-1} = k_{l-1} a_l + a_{l+1} \quad (k_{l-1} \in \mathbb{N}, 0 \leq a_{l+1} < a_l)$ として a_{l+1} を決定していく。 a_1, a_2, \dots は 0 以上の真に減少する整数列であるから、 $a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在する。すると、 $\frac{a_{N-1}}{a_N} = \frac{k_{N-1} a_N}{a_N} = k_{N-1}$

$$A = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_{N-1}}}}$$

そこで、連分数を作成する操作が終わる。従って定理が示された。//

※ このとき、 $\gcd(a, b) = a_N$ となる

◇計算例 $\frac{225}{157}$ の場合

互除法の計算は以下のとおりである。

$\begin{array}{r} 227 \ 157 \\ \hline 157 \quad (\ 1 \\ \hline 68 \ 157 \\ 2 \) \quad 136 \\ \hline 68 \ 21 \\ \hline 63 \quad (\ 3 \\ \hline 5 \ 21 \\ 4 \) \quad 20 \\ \hline 5 \ 1 \\ \hline 5 \quad (\ 5 \\ \hline 0 \ 1 \end{array}$	$\begin{aligned} &\rightarrow 227 = 1 \cdot 157 + 68 \quad [k_0 = 1, \ a_2 = 68] \\ &\rightarrow 157 = 2 \cdot 68 + 21 \quad [k_1 = 2, \ a_3 = 21] \\ &\rightarrow 68 = 3 \cdot 21 + 5 \quad [k_2 = 3, \ a_4 = 5] \\ &\rightarrow 21 = 4 \cdot 5 + 1 \quad [k_3 = 4, \ a_5 = 1] \\ &\rightarrow 5 = 5 \cdot 1 + 0 \quad [k_4 = 5, \ a_6 = 0] \end{aligned}$
--	---

この計算から

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	227	157	68	21	5	1	0
k_n	1	2	3	4	5		

$$\frac{227}{157} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{68}{157} \\ &= \frac{225}{157} = \text{左辺} \end{aligned}$$

計算をうまく進めるために、一般の場合について少し考察を進めることにする。

$$a_{n-1} = k_{n-1}a_n + a_{n+1} \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

$$a_0 = k_0a_1 + a_2 \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

この式に、 $a_1 = k_1a_2 + a_3$ を代入すると

$$a_0 = k_0(k_1a_2 + a_3) + a_2 = (k_0k_1 + 1)a_2 + k_0a_3$$

さらに、 $a_2 = k_2a_3 + a_4$ を代入すると

$$a_0 = (k_0k_1 + 1)(k_2a_3 + a_4) + k_0a_3 = (k_0k_1k_2 + k_0 + k_2)a_3 + (k_0k_1 + 1)a_4$$

以下同様に繰り返して、

$$a_0 = p_n a_n + r_n a_{n+1} \quad \cdots \quad \textcircled{3}$$

の形に表すことができる。

$a_n = k_n a_{n+1} + a_{n+2}$ を代入して。一歩進める。

$$a_0 = p_n(k_n a_{n+1} + a_{n+2}) + r_n a_{n+1} = (p_n k_n + q_n) a_{n+1} + p_n a_{n+2}$$

従って、

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n k_n + r_n & \cdots \textcircled{4} \\ r_{n+1} = p_n & \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

⑤ より $r_n = p_{n-1}$ として ④ に代入すると、

$$p_{n+1} = k_n p_n + p_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

p_0, p_1 については、 $a_0 = p_1 a_1 + p_0 a_2$ と ② を比べて、
 $p_0 = 1, p_1 = k_0$ とすればよい。

a_1 について、上と同様な表し方を考えると、

$$\begin{cases} a_1 = q_n a_n + q_{n-1} a_{n+1}, & q_0 = 0, q_1 = 1, \\ q_{n+1} = k_{n-1} q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

とできる。

このとき、

$$A = \frac{a_0}{a_1} = \frac{p_n a_n + p_{n-1} a_{n+1}}{q_n a_n + q_{n-1} a_{n+1}}$$

定義 2 p_n ($n \geq 1$) は k_0, k_1, \dots, k_{n-1} の多項式である。ガウスに従って、これを $[k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]$ という記号で表す。

q_n は k_1, k_2, \dots, k_{n-1} の多項式で、作り方から $q_n = [k_1, k_2, \dots, k_{n-1}]$ となる。

補題 1 $[k_0, k_1, \dots, k_n] = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]k_n + [k_0, k_1, \dots, k_{n-2}]$ ($n \geq 2$)

証明) これは、 $p_{n+1} = k_n p_n + p_{n-1}$ ($n \geq 2$) を書き直しただけである。

補題 2 $[k_0, k_1, \dots, k_n] = [k_1, k_2, \dots, k_n]k_0 + [k_2, k_3, \dots, k_n]$ ($n \geq 2$)

証明)

- $a_0 = [k_0, k_1, \dots, k_n]a_{n+1} + [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]a_{n+2}$
- $a_1 = [k_1, k_2, \dots, k_n]a_{n+1} + [k_1, k_2, \dots, k_{n-1}]a_{n+2}$
- $a_2 = [k_2, k_3, \dots, k_n]a_{n+1} + [k_2, k_3, \dots, k_{n-1}]a_{n+2}$

を $a_0 = k_0 a_1 + a_2$ に代入して、両辺の a_n の係数を比較すると補題の式が示される。//

定理 5

$$k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}} = \frac{[k_0, k_1, \dots, k_n]}{[k_1, k_2, \dots, k_n]}$$

証明) 右辺 = $\frac{[k_1, k_2, \dots, k_n]k_0 + [k_2, k_1, \dots, k_n]}{[k_1, k_2, \dots, k_n]}$
 $= k_0 + \frac{1}{\frac{[k_1, k_2, \dots, k_n]}{[k_2, k_3, \dots, k_n]}}$

次に、 $\frac{[k_1, k_2, \dots, k_n]}{[k_2, k_3, \dots, k_n]}$ に同様な変形を行うと、
 $= k_1 + \frac{1}{\frac{[k_2, k_3, \dots, k_n]}{[k_3, k_4, \dots, k_n]}}$

となる。これを繰り返して、定理の左辺にたどり着く。 //

有理数 A から連分数展開の計算で順に k_0, k_1, \dots, k_n を計算してきたが、逆に、連分数展開が k_0, k_1, \dots, k_n となるような A を求める計算をする。たとえば $k_0 = 1, k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 4, k_4 = 5$ の場合について計算してみる。

- (1) $[k_0, k_1, \dots, k_m] = [k_0, k_1, \dots, k_{m-1}]k_m + [k_0, k_1, \dots, k_{m-2}]$ を用いる方法

$$p_0 = 1, p_1 = k_0, \quad p_l = k_l \cdot p_{l-1} + p_{l-2}$$

$$q_1 = 0, q_2 = k_2 \quad q_l = k_l \cdot q_{l-1} + q_{l-2} \text{ で計算していくことになる。}$$

n	0	1	2	3	4	
k_n	1	2	3	4	5	
p_n	1	1	3	10	43	225
q_n	0	1	2	7	30	157

$$A = \frac{p_5}{q_5} = \frac{225}{157}$$

- (2) $[k_m, k_1, \dots, k_n] = [k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n]k_m + [k_{m+2}, k_{m+3}, \dots, k_n]$ を用いる方法

n	4	3	2	1	0
k_n	5	4	3	2	1
a_n	5	21	68	157	225

($a_4 = k_4 = 5$, $a_3 = k_3 \cdot a_4 + 1 = 21$, $a_2 = k_2 \cdot a_3 + a_4 = 68$,
 $a_1 = k_1 \cdot a_2 + a_3 = 157$, $a_0 = k_0 \cdot a_1 + a_2 = 225$ という計算を上の方の表のところで
 実施している。)

$$A = \frac{a_0}{a_1} = \frac{225}{157}$$

さて、 $A = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + k_n}}}$ について、連分数展開を途中で止めた有理数を
 考えてみることにする。

$Q_0 = k_0$, $Q_1 = k_0 + \frac{1}{k_1}$, $Q_2 = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2}}$ \dots , $Q_m = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + k_m}}}$ と
 おく。 $1 \leq m \leq n$ のとき、 $Q_m = \frac{p_m}{q_m}$ である。

$A = \frac{225}{157}$ については、上の (1) の計算により、

$$Q_0 = 1, Q_1 = \frac{3}{2}, Q_2 = \frac{10}{7}, Q_3 = \frac{43}{30}, Q_4 = \frac{225}{157} = A$$

小数で表すと

$$Q_0 = 1, Q_1 = 1.5, Q_2 = 1.4285\dots, Q_3 = 1.4333\dots, Q_4 = A = 1.4331\dots$$

だんだん A に近づいていっている様子がわかる。

一般の有理数 A の連分数展開が $A = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + k_n}}}$ であるとき、その連
 分数展開を途中で止める Q_m と連分数展開の途中経過の比較を考える。

例えば、 $\frac{225}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}}$ である。 $\alpha_1 = \frac{157}{68}$ とおく。 $A = k_0 + \frac{1}{\alpha_1}$

次に $\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\frac{68}{21}} = k_2 + \frac{1}{\alpha_2}$ ($\alpha_2 = \frac{68}{21}$) とし、 $A = k_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\alpha_2}}}$

同様に、 $\alpha_3 = \frac{21}{5}$, $\alpha_4 = 5 = k_4$

一般の有理数 A についても、 k_m, α_m を同様に定めていく。

この $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の作り方から $A = \frac{[k_0, \dots, k_{m-1}, \alpha_m]}{[k_1, \dots, k_{m-1}, \alpha_m]}$ ($m = 1, 2, \dots, n$)

が成り立つ。従って、 $A = \frac{[k_0, \dots, k_{m-1}]\alpha_m + [k_0, \dots, k_{m-2}]}{[k_1, \dots, k_{m-1}]\alpha_m + [k_1, \dots, k_{m-2}]} = \frac{p_{m-1}\alpha_m + p_{m-2}}{q_{m-1}\alpha_m + q_{m-2}}$

$$\begin{aligned} A - Q_m &= \frac{p_m\alpha_{m+1} + p_{m-1}}{q_m\alpha_{m+1} + q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(p_m\alpha_{m+1} + p_{m-1})q_m - (q_m\alpha_{m+1} + q_{m-1})p_m}{(q_m\alpha_{m+1} + q_{m-1})q_m} \\ &= \frac{p_{m-1}q_m - q_{m-1}p_m}{(q_m\alpha_{m+1} + q_{m-1})q_m} \end{aligned}$$

$$\text{分子} = \begin{vmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{m-1} & k_{m-1}p_{m-1} + p_{m-2} \\ q_{m-1} & k_{m-1}q_{m-1} + q_{m-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{m-1} & p_{m-2} \\ q_{m-1} & q_{m-2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p_{m-2} & p_{m-1} \\ q_{m-2} & q_{m-1} \end{vmatrix}$$

従って、

$$\begin{vmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & k_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}$$

$$A - Q_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(q_m \alpha_{m+1} + q_{m-1}) q_m}$$

また、 $q_m \alpha_{m+1} + q_{m-1} > q_m$ であるから、以下の定理が成り立つ。

定理 6 有理数 A の連分数展開が $A = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}}$ であるとき、
 $p_m = [k_0, k_1, \dots, k_m]$, $q_m = [k_1, k_2, \dots, k_m]$, $Q_m = \frac{p_m}{q_m}$ として

$$|A - Q_m| < \frac{1}{q_m^2} \quad (1 \leq m \leq n)$$

が成り立つ。

注意 定理 1 (2) より、 A が有理数ならば、 $\exists N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall m \geq N, \quad A - Q_m = 0$ となる。すなわち、連分数展開はあるところで終了する。

6 連分数を用いた無理数の近似について

- $\sqrt{2}$ について

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \quad : \quad k_0 = 1, \quad \alpha_1 = \sqrt{2} + 1$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \quad : \quad k_1 = 2, \quad \alpha_2 = \sqrt{2} + 1$$

以下同様であるから、 $k_m = 2, \quad \alpha_m = \sqrt{2} + 1 \quad (m = 1, 2, \dots)$ といえる。従って、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

という無限に続く連分数展開が得られる。 $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$ という少数表示は規則性がないが、連分数展開は、2つ目からすべて2となる規則的なものとなる。

連分数展開の途中までで作る有理数を考える。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
k_n	1	2	2	2	2	2	2	2	...
p_n	1	1	3	7	17	41	99	239	...
q_n	0	1	2	5	12	29	70	169	...

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad Q_3 = \frac{7}{5} = 1.4, \quad Q_4 = \frac{17}{12} = 1.416666\dots,$$

$$Q_5 = \frac{41}{29} = 1.43793\dots, \quad Q_6 = \frac{99}{70} = 1.414285\dots, \quad Q_7 = \frac{239}{169} = 1.414201\dots,$$

$\{Q_n\}$ は $\sqrt{2}$ に近づく無限有理数列である。

• $\sqrt{3}$ について

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3} - 1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} \quad : \quad k_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \quad : \quad k_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\alpha_2 = \sqrt{3} + 1 = 2 + (\sqrt{3} - 1) \quad : \quad k_2 = 2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \alpha_1$$

$\alpha_3 = \alpha_1$ あるから、 $k_4 = k_1 = 1$, $\alpha_4 = \alpha_2$, $k_5 = k_2 = 2$, $\alpha_5 = \alpha_1$ となる。以下同様に $k_{2m-1} = 1$, $k_{2m} = 2$ となる。従って、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} + \dots \frac{1}{+1+} \frac{1}{2+} \dots\dots$$

という無限に続く連分数展開が得られる。 $\sqrt{3} = 1.732050 \dots$ という規則性の無い少数が、連分数展開では、2つ目から1と2を繰り返す規則的なものとなる。

連分数展開の途中までで作る有理数を考える。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
k_n	1	1	2	1	2	1	2	...	
p_n	1	1	2	5	7	19	26	71	...
q_n	0	1	1	3	4	11	15	41	...

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = 2, \quad Q_3 = \frac{5}{3} = 1.66666\dots, \quad Q_4 = \frac{7}{4} = 1.75,$$

$$Q_5 = \frac{19}{11} = 1.727272\dots, \quad Q_6 = \frac{26}{15} = 1.333333\dots, \quad Q_7 = \frac{71}{41} = 1.731707\dots,$$

$\{Q_n\}$ は $\sqrt{3}$ に近づく無限有理数列である。

一般に次の定理が成り立つ。

定理 7 無理数 A の連分数展開が $A = k_0 + \frac{1}{k_1+} \frac{1}{k_2+} \dots \frac{1}{+k_n+} \dots\dots$ であるとき、

$$p_m = [k_0, k_1, \dots, k_m], \quad q_m = [k_1, k_2, \dots, k_m], \quad Q_m = \frac{p_m}{q_m} \text{ として}$$

$$0 < |A - Q_m| < \frac{1}{q_m^2} \quad (0 < q_1 < q_2 < \dots < q_m < \dots\dots)$$

が成り立つ。

証明は、有理数のときと同じであるが、 A が有理数であるときは、 Q_m はどこかで A と一致する野に対し、 A が無理数であるときは、すべての Q_m は A と異なる。従って、 $0 < |A - Q_m|$ となる。

この不等式において、 $q_{m+1} = k_{m+1}q_m + q_{m-1}$ であったから、 $q_m < q_{m+1}$ 。増加する自然数列であることから、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$$

従って、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = A$$

さらに、 $\{Q_n\}$ は単調に A に近づくことを以下で示す。

前に有理数 A について示したのと同様に、 $A - Q_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(p_m \alpha_m + \alpha_{m+1})q_m}$ がなりたつので、 Q_1, Q_3, \dots は A より大きく、 Q_2, Q_4, \dots は A より小さい。特に、 A は A は Q_m と Q_{m+1} の間にある。

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \left| \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} \right| = \left| \frac{p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1}}{q_{m+1}q_m} \right| = \frac{1}{q_{m+1}q_m} \\ \bullet \quad & \left| A - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| = \left| \frac{p_{m+1}\alpha_{m+1} + p_{m+2}}{q_{m+1}\alpha_{m+1} + q_{m+2}} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| \\ & = \left| \frac{(p_{m+1}\alpha_{m+1} + p_{m+2}q_{m+1}) - (q_{m+1}\alpha_{m+1} + q_{m+2})p_{m+1}}{(q_{m+1}\alpha_{m+1} + q_{m+2})q_{m+1}} \right| \\ & = \left| \frac{p_{m+1}q_{m+1} - q_{m+2}p_{m+1}}{(q_{m+1}\alpha_{m+1} + q_{m+2})q_{m+1}} \right| < \frac{1}{q_{m+2}q_{m+1}} \end{aligned}$$

ここで、 $q_{m+2} = k_m q_{m+1} + q_m > q_m + q_m = 2q_m$

よって、

$$\begin{aligned} |A - Q_{m+1}| &= \left| A - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| < \frac{1}{q_{m+2}q_{m+1}} < \frac{1}{2q_m q_{m+1}} = \frac{1}{2} \left| \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} \right| \\ &= \frac{1}{2} |Q_{m+1} - Q_m| = \frac{1}{2} |(Q_{m+1} - A) - (Q_m - A)| \leq \frac{1}{2} |(Q_{m+1} - A)| + \frac{1}{2} |Q_m - A| \end{aligned}$$

$$\therefore |A - Q_{m+1}| < |A - Q_m|$$

以上をまとめて、次の定理となる。

定理 8

A が無理数で、その連分数展開が $A = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n + \dots}}$ である

とき、 $Q_n = \frac{[k_0, k_1, \dots, k_n]}{[k_1, k_2, \dots, k_n]}$ とおくと、

$$0 < |A - Q_{m+1}| < |A - Q_m| \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = A$$

7 2017年前期 大阪大学 理系 第3問について

問題は以下のとおりである。

2017年前期 大阪大学 理系

3. a, b を自然数とし、不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (A)$$

を考える。次の問いに答えよ。ただし、 $2.654 < \sqrt{7} < 2.646$ であること、 $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) 不等式 (A) を満たし、 $b \geq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ。

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち $b \geq 2$ であるものをすべて求めよ。

定理7、定理8により、

$$0 < \left| \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{7} \right| < \frac{1}{b_n^2}, \quad 0 < \left| \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{7} \right| < \left| \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{7} \right|$$

$$(0 < b_1 < b_2 < \dots)$$

を満たすような有理数の無限数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ を連分数展開を用いて作ることができる。

大阪大学のこの問題は、近似の誤差が $\frac{2}{b_n^4}$ で抑えられる有理数列を題材としているもので、連分数展開で作る近似有理数列が誤差 $\frac{1}{b_n^2}$ で抑えられるのにくらべてもっと精度が高いものである。 \sqrt{N} ($N \in \mathbb{N}$) については、近似有理数の分母の次数が2までは無限数列ができるが、それを超えると無限数列はできないという事実があり、大阪大学のこの問題では、それに基づき、有限個の有理数を求めさせている。

(1) は

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| = \left| \left(\frac{a}{b} - \sqrt{7} \right) + 2\sqrt{7} \right| < \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| + 2\sqrt{7} < \frac{4}{b^4} + 2 \times 2.646 \leq \frac{4}{2^4} + 5.292 < 6$$

(2) については、(A) の左辺、右辺にそれぞれ $\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right|$, 6 をかけて

$$\left| \frac{a^2}{b^2} - 7 \right| < \frac{2}{b^4} \times 6. \quad \text{さらに } b^2 \text{ をかけて、} |a^2 - 7b^2| < \frac{12}{b^2}$$

この不等式の左辺は0以上の整数である。一方右辺は、 $b \geq 4$ のとき1より小さくなる。従って、このとき、 $a^2 - 7b^2 = 0$ となる。これは、 $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ を導き、 $\sqrt{7}$ が無理数で

あることに矛盾する。すなわち、 $b < 4$ である。

• $b = 2$ のとき、
 $|a^2 - 28| < 3$ 。これを満たす a はない。

• $b = 3$ のとき、
 $|a^2 - 63| < \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ 。よって、 $a = 8$

以上より、答 $a = 8, b = 3$

さて、

$$\left| \sqrt{N} - \frac{a}{b} \right| < \frac{c}{b^3} \quad (c \text{ は正の定数, } a, b, N \in \mathbb{N})$$

について考える。

b が大きい時、 $\frac{c}{b^3} < 1$ となる。このとき、

$$\left| \sqrt{N} + \frac{a}{b} \right| = \left| 2\sqrt{N} + \left(-\sqrt{N} + \frac{a}{b} \right) \right| < 2\sqrt{N} + \left| \sqrt{N} - \frac{a}{b} \right| < 2\sqrt{N} + 1 \leq 3\sqrt{N}$$

これを上の不等式にかけて、

$$\left| N - \frac{a^2}{b^2} \right| < \frac{c}{b^3} \times 3\sqrt{N}, \quad |b^2N - a^2| < \frac{3c\sqrt{N}}{b}$$

最後の不等式で左辺は0以上の整数である。したがって、 b が大きくなって右辺が1以下になると、 $b^2N - a^2 = 0$ となるが、これは $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$ となる。 N が自然数の平方でないとき、 \sqrt{N} は無理数であることから、それは成り立たない。

以上から次の定理が成り立つ。

定理 9

$N \in \mathbb{N}$ で、 \sqrt{N} が無理数のとき、

$$\left| \sqrt{N} - \frac{a}{b} \right| < \frac{c}{b^3} \quad (c \text{ は正の定数, } a, b, N \in \mathbb{N})$$

をみたす自然数 a, b の組は有限個しかない。

8 終わりに

今回、N君からの質問を機会にディオファントス近似や関連して連分数の入り口について少し復習したり、数値計算をしたりした。具体的にいくつか計算することは楽しいことであった。N君には、3つの大学入試問題について知らせてくれたこと、そして、勉強の機会を与えてくれたことに感謝したい。

連分数については、ずいぶん昔に \sqrt{N} について考え、それが循環する連分数になることや循環節の長さ等について少し調べた。そのことについては、「数学 I・Aの指導メモ」

(1996年富山県高等学校教育研究会数学部会発表資料)に載せておいた。解決できていないことがあったのだが、その後も調べておらず、未解決のままであることを思い出した。

このレポートを書きながらWEBを検索していたら、大阪大学 水谷 治哉先生が高校生を対象とした「連分数とディオファントス近似」という公開講座をされており、そのプレゼンテーション資料をWEBに掲載されていることを知った。もちろん、大阪大学の出題との関連については不明である。

◇参考とした書籍、参考となる資料、その他

[1] 高木 貞治 「初等整数論講義」 第2版 共立出版

第2章 連分数の初めの部分だけを復習した。この本の序言には「第2章連分数論は因習的なるであるが、本書ではむしろそれを現代的の立場から考察して、いわゆる整数的近似法 (Diophantsche Approximation) の一斑を紹介する。」とある。時間があれば、もっと勉強したいところである。

[2] Daniel Durverney 原著・塩川 宇賢 訳 「数論 ー講義と演習ー」 森北出版

第1章 無理性とディオファントス近似に \sqrt{d} の無理性、 e の無理性、 π の無理性が解説されている。

[3] 「連分数とディオファントス近似」 大阪大学大学院理学研究科 水谷 治哉

2018年8月9日 高校生のための公開講座

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/koukai/mizutani2018.pdf>

[4] 片山 喜美 「数学I・Aの指導メモ」(1996年富山県高教研発表 pdf file)

※ <http://ja9nfo.web.fc2.com/> から数学の資料のページに行くと閲覧可能。

第1章 循環連分数 に連分数に関する考察を記載。

「 \sqrt{N} の連分数展開は、第2項 k_1 を先頭とする循環節をもち、循環節の最後の項を K_n とすると、 $k_n = 2 \left[\sqrt{N} \right]$ となる」ということに気付いているが、証明ができていない。