東京工業大学 2009 年 AO 入試　第３問

2021 年 1 月
石動高校　片山　喜美

東京工業大学 2009 年 AO 入試の第３問として以下の出題があった。（N 君から教えてもらったものである。）

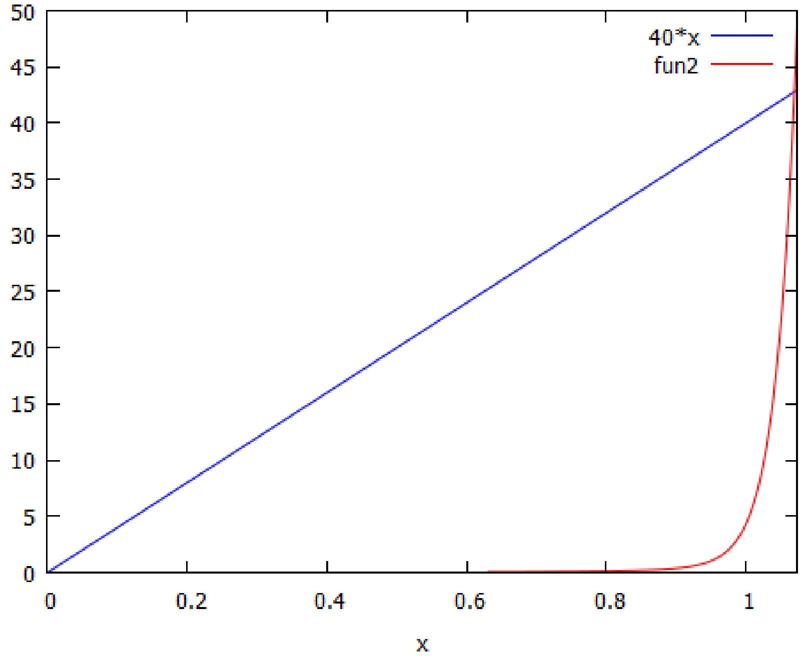
自然数 n に対し、第 1 象限において不等式

$$nx \geqq y \geqq x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \quad \cdots \quad + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$$

の表す領域の面積を $S(n)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)$ を求めよ。

$y = nx$ と $y = x^n + \dfrac{1}{2}x^{n-1} + \dfrac{1}{3}x^{n-2} + \quad \cdots \quad + \dfrac{1}{n}x + \dfrac{1}{n+1}$ のグラフについて、 $n = 10, 20, 30, 40, \quad \cdots$ として状況を考えてみる。

$n = 40$ のときに Maxima を利用して描いたグラフは以下のとおりである。



具体的な数値を代入したグラフを眺めていると、n を大きくしていくに従って、以下のように変化するのではないかと思われる。

- 第 1 象限で 2 つのグラフは 2 か所で交わり、 x 座標の小さいほうは、 $+0$ に近づき、 x 座標の大きい方は、 $1+0$ に近づくものと推測される。

- $y=x^n+\dfrac{1}{2}x^{n-1}+\dfrac{1}{3}x^{n-2}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{n}x+\dfrac{1}{n+1}$ のグラフは $0\leqq x\leqq 1$ のところでは、相対的に見て「超低空飛行」になってきている。

  ※　$x=1$ のときの値　$1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$ は $n\to\infty$ のときに ∞ に発散するものの、その値は、n が相当大きくなっても全然大きくならず、数値的には「本当に発散するのだろうか？」と思ってしまうものである。

- 従って、領域は3点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,n)$ を頂点とする直角三角形に近づく。従って、$S(n)$ は $\dfrac{n}{2}$ 程度であろうと思われる。$\left(S(n)=\dfrac{n}{2}+O(n)\right.$ ということ$\left.\right)$

- であれば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)=\frac{1}{2}$ となるのであろう。

さて、これらのことをどうやって正当化するか？

$f(x)=x^n+\dfrac{1}{2}x^{n-1}+\dfrac{1}{3}x^{n-2}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{n}x+\dfrac{1}{n+1}$ とおく。$f(x)$ より小さいもの、大きいもので取り扱いやすいもの（積分しやすいもの）を見つけることをうまく見つけて、$S(n)$ をはさみ打ちにする。

1. $f(x)$ より小さいもの
   $x>0$ のとき、$f(x)>x^n$ である。$nx=x^n$ とすると、$x(x^{n-1}-n)=0,\quad x=0,\,n^{\frac{1}{n-1}}$

   $$S(n)<\int_0^{n^{\frac{1}{n-1}}}(nx-x^n)dx=\left[\frac{n}{2}x^2-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{n^{\frac{1}{n-1}}}=\frac{n}{2}n^{\frac{2}{n-1}}-\frac{1}{n+1}n^{\frac{n+1}{n-1}}$$

   $$\frac{S(n)}{n}<\frac{1}{2}n^{\frac{2}{n-1}}-\frac{1}{n+1}n^{\frac{n+1}{n-1}-1}=\frac{S(n)}{n}<\frac{1}{2}n^{\frac{2}{n-1}}-\frac{1}{n+1}n^{\frac{2}{n-1}}$$

   ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n-1}}$ について考える。$\log n^{\frac{2}{n-1}}=\dfrac{2}{n-1}\log n\quad\cdots\quad①$

   $\log n=t$ とおくと、$n=e^t,\quad ①=\dfrac{2}{e^t-1}t=\dfrac{2e^t}{e^t-1}\dfrac{t}{e^t}=\dfrac{2}{1-e^{-t}}\dfrac{t}{e^t}$

   $n\to\infty$ のとき、$t\to\infty$ である。

   数学 III で学ぶことであるが、$t>0$ のとき、$e^t>1+t+\dfrac{1}{2}t^2$ を示し、$0<\dfrac{t}{e^t}<\dfrac{t}{1+t+\frac{1}{2}t^2}$ から $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$ が示すことができる。

   よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log n^{\frac{2}{n-1}}=0,\quad\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n-1}}=1$

   $$0<\frac{S(n)}{n}<\frac{1}{2}n^{\frac{2}{n-1}}-\frac{1}{n+1}n^{\frac{2}{n-1}}\quad で\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^{\frac{2}{n-1}}-\frac{1}{n+1}n^{\frac{2}{n-1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1-0\cdot 1=\frac{1}{2}$$

   であるから、

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n}\leqq\frac{1}{2}$$

※グラフを眺めると、$0 \leqq x \leqq 1$ のところだけで面積が $\dfrac{n}{2}$ とほとんど差がないくらいに見える。上の不等式から求める極限値は $\dfrac{1}{2}$ で上から抑えられていることとあわせると、 $\dfrac{1}{2} \leqq x$ のところの面積は、幅が狭くなって、 n で割ると 0 に収束するものと考えられる。そのことを踏まえて次を考える。

2. $f(x)$ より大きいもの

$0 < x < 1$　で $f(x)$ より大きいものを考えて、$0 \leqq x \leqq 1$ における $y = nx$ とで挟まれる部分の面積を計算すれば $S(n)$ より小さい面積となる。$y = nx$ は原点を通り、 $y = f(x)$ は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{n+1}\right)$ を通って下に凸となっている。グラフを見ると、$x = 0$ より少し右のところで $y = nx$ と $y = f(x)$ が交点をもっている。$y = f(x)$ の $x = 0, x = 1$ のときの点を結んだ直線を考えると、$0 < x < 1$ において $y = f(x)$ より上になり、しかも、その差は少ないように見える。　$0 < x < 1$ のとき、$x^n, x^{n-1},\ \cdots\ , x^2 < x$ であるから、

$$f(x) < x + \frac{1}{2}x + \ \cdots\ + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}x = \left(1 + \frac{1}{2} + \ \cdots\ + \frac{1}{n}\right)x + \frac{1}{n+1}$$

ここで、 $k < x < k+1$ のとき、 $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{x}$ より、

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} dx < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}\ , \qquad \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

従って、

$$1 + \frac{1}{2} + \ \cdots\ + \frac{1}{n} < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + [\log x]_1^n = 1 + \log n$$

$$f(x) < (1 + \log n)x + \frac{1}{n+1}$$

$y = nx$ と $y = (1 + \log n)x + \dfrac{1}{n+1}$ との交点は、

$(n - 1 - \log n)x = \dfrac{1}{n+1}$ より、 $x = \dfrac{1}{(n - 1 - \log n)(n+1)}$

これを ϵ とおく。（きっと、 $\lim_{n\to\infty} \epsilon = 0$ となるだろう。）

$$S(n) > \int_\epsilon^1 \left\{nx - (1 + \log n)x - \frac{1}{n+1}\right\} dx = \left[\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{2}(1 + \log n)x^2 - \frac{1}{n+1}x\right]_\epsilon^1$$

$$= \left\{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}(1 + \log n) - \frac{1}{n+1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{2}(1 + \log n)\epsilon^2 - \frac{1}{n+1}\epsilon\right\}$$

$$\frac{S(n)}{n} > \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(1 + \log n)}{n} - \frac{1}{n(n+1)}\right\} - \left\{\frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{(1 + \log n)}{n}\epsilon^2 - \frac{1}{n(n+1)}\epsilon\right\}$$

ここで、 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \epsilon = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{(1 - \frac{1}{n} - \frac{\log n}{n})n(n+1)} = 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n} \geqq \frac{1}{2}$$

以上、1 と 2 より、 $\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}}$ $\cdots$ 答