曲線の長さのある対応について

– 2018 年山梨大学・医学部　入試問題から –

2020 年 11 月～12 月
石動高校　片山　喜美

2018 年山梨大学・医学部の入試問題に以下の出題があった。

問題 5　$f(x) = \dfrac{1}{2}\log x - \dfrac{1}{4}x^2$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(x_0,\, y_0)$ における法線上に点 $B(x_1,\, y_1)$ があり、 $AB = 1$ かつ $y_1 > y_0$ を満たす。 x_0 が区間 $1 \leqq x_0 \leqq \sqrt{3}$ を動くとき、点 A の描く曲線を C_0 、点 B の描く曲線を C_1 とする。

(1)　曲線 C_0 の長さを求めよ。

(2)　$x_1,\, y_1$ を x_0 で表せ。

(3)　曲線 C_1 の長さを求めよ。

「(1) の曲線 C_0 の長さを l、(3) の曲線 C_1 の長さを L とすると、計算の結果は

$$l = \frac{1}{4}(\log 3 + 2), \quad L = l + \frac{\pi}{6}$$

となる。ここで l と L の差として出てくる $\dfrac{\pi}{6}$ は、$x_0 = 1$ のときの法線 AB と $x_0 = \sqrt{3}$ のときの法線 AB がなす角に等しくなっている。

この問題について、かつての教え子の N 君から「これは、この問題の曲線だから成り立つとうことではなく、一般に成り立つとのことですが、それについて、説明してほしい。」という問い合わせがあった。そこで、以下のように整理して、それを示すことにした。

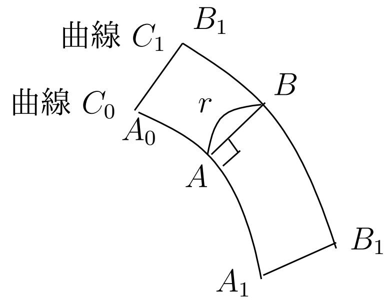
定理

点 A を曲線 C_0 上の点とする。そして、点 A における曲線 C_0 の法線上に点 B を $AB = r$ となるようにとる。

この状態で、点 A を曲線 C_0 上の点 A_0 から A_1 まで動かすとき、点 B が曲線 C_1 上を点 B_0 から点 B_1 まで動いたとする。このとき、曲線 C_0 の点 A_0 から A_1 までの長さを l、曲線 C_1 の点 B_0 から B_1 までの長さを L とする。また、法線 A_0B_0 と法線 AB のなす角を θ とするとき、 θ は A_0B_0 と法線 A_1B_1 のなす角 α まで単調に増加するものとする。

このとき、　$L = l + r\alpha$　が成り立つ。

元の曲線の長さに比べて法線の角の変化量の r 倍だけ増えるというのは、なかなか面白い関係だと思う。私は今までこのことを知らなかった。どのようにこの対応を示すか、自分なりに２種類の説明を考えてみた。



なお、次のような類題も作って、この曲線に合わせた具体的な計算で上記の性質が成り立つことを確認してみた。

<u>類題</u>　曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $A(x_0,\,y_0)$ における法線上に点 $B(x_1,\,y_1)$ があり、$AB=r$ かつ $y_1<y_0$ を満たす。x_0 が区間 $0\leqq x_0\leqq 1$ を動くとき、点 A の描く曲線を C_0 、点 B の描く曲線を C_1 とする。

(1)　曲線 C_0 の長さを求めよ。

(2)　$x_1,\,y_1$ を x_0 で表せ。

(3)　曲線 C_1 の長さを求めよ。

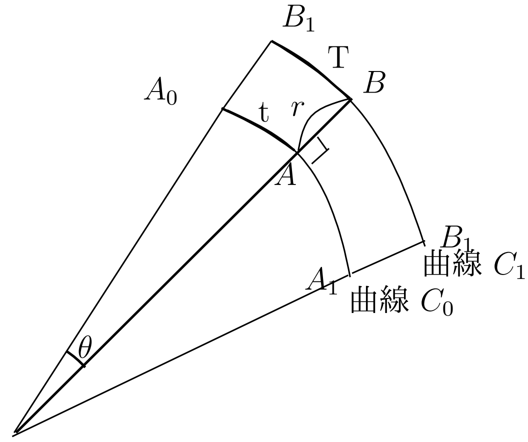
(1) は、山梨大学の問題に比べて積分計算に手間が掛かる。これだけを曲線の長さをもとめる練習問題にしてもいいのだろう。$l=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right\}$ になる。

(3) は (2) を踏まえて計算を進め、積分をうまく２つに分けることで $L=l+r\dfrac{\pi}{4}$ を導く。

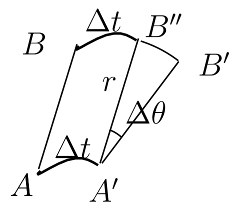
この問題も解いてみることが、一般の場合の２種類の説明の一つについてヒントになった。

<u>定理の証明　その１</u>

曲線 C_0 の点 A_0 から点 A までの長さを変数 t 、曲線 C_1 の点 B_0 から点 B までの長さを変数 T とする。また、直線 A_0B_0 を基準として、直線 AB までの角を変数 θ とする。



曲線C_0の点Aがわずかに動いて点A'に至ったとする。このときの曲線C_0を点Aから点A'までの長さをΔt、対応する曲線C_1の点Bから点B'までの長さをΔTとする。また、角の増分を$\Delta\theta$とする。



$\Delta T = \overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{BB''} + \overset{\frown}{B''B'} = \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{B''B'} \fallingdotseq \Delta t + r\Delta\theta$
極限に移行して、$dT = dt + rd\theta$
全体の長さは積分で計算して

$$L = \int_{B_0\text{から }B_1\text{まで}} dT = \int_{A_0\text{から }A_1\text{まで}} (dt + rd\theta) = \int_0^l dt + r\int_0^\alpha = l + r\alpha$$

以上により定理は示された。//

曲線の長さの公式を用いた証明を行うため、山梨大学の問題および試しに作ってみた類題について計算を追ってみる。

- **2018年山梨大学・医学部の入試問**について

$f(x) = \dfrac{1}{2}\log x - \dfrac{1}{4}x^2$ の $1 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ の長さを l でとする。$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - x\right)$ であるから

$$l = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{x} - x\right)^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + x\right)^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log x + \frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2}$$

$y = f(x)$ の法線ベクトルで、大きさが 1 、 y 成分が正のものは

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{\{f'(x)\}^2 + 1}}(-f'(x), 1) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right)}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right), 1\right) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

である。

$(x_1, y_1) = (x, f(x)) + \overrightarrow{n}$ であるから、

$$x_1 = x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = x + 1 - \frac{2}{x^2 + 1}, \quad y_1 = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{dx_1}{dx} = 1 + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) + \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{2x} + \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{2x}\left\{1+\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right\} = \frac{1-x^2}{2x}\frac{dx_1}{dx}$$

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{(1-x^2)^2}{4x^2}}\left\{1+\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right\}dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}}\left\{1+\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right\}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left\{\frac{(1+x^2)}{2x}+\frac{2}{x^2+1}\right\}dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\right)dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{x^2+1}dx = l + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= l + \Big[\ 2\theta\ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = l + \frac{\pi}{6}$$

- 類題の曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ について

$y' = x$ であるから、

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2\theta+1}\ \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^4\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta d\theta}{\{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)\}^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\right\}^2 \cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1-\sin\theta)^2}+\frac{2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}+\frac{1}{(1+\sin\theta)^2}\right\}\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1-\sin\theta)^2}+\left(\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)+\frac{1}{(1+\sin\theta)^2}\right\}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\sin\theta} - \log(1-\sin\theta) + \log(1+\sin\theta) - \frac{1}{1+\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} + \log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right\}}$$

次のような計算でも求めることができる。

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \Big[\ x\sqrt{1+x^2}\ \Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= l - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta d\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}d\theta\right) = \frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin\theta) - \log(1-\sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(\sqrt{2}+1)$$

従って、

$$l = \sqrt{2} - \{l - \log(\sqrt{2}+1)\} \qquad \underline{l = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)\right\}}$$

※上記の計算の途中に出てきた積分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

については、

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C \quad (x>0)$$

となることが数学 III の問題集等で出てくるので

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d = \left[\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \log(1+\sqrt{2})$$

と計算できる。

ただし、上記の不定積分はどうやって導くのかと疑問に思うかもしれないので計算してみる。(先に定積分を実施したのと同様の計算)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \quad (x=\tan\theta)$$

$$= \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}\right)\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + C$$

$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ であるから、$\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$\sin\theta > 0,\quad x > 0$ であるから、 $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} + C = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{(x^2+1)-x^2} + C = \log(\sqrt{x^2+1}+x) + C$$

次に法線上で曲線から距離 r 離れた点の軌跡の長さ L を考える。

大きさが r の法線ベクトルで、 y 成分が負であるものは、$\overrightarrow{n} = \dfrac{r}{\sqrt{x^2+1}}(x,-1)$ である。

$(x_1,y_1) = (x,f(x)) + \overrightarrow{n}$ であるから、

$$x_1 = x + \frac{rx}{\sqrt{x^2+1}},\qquad y_1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{r}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dx_1}{dx} = 1+\frac{r}{\sqrt{x^2+1}} - rx\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = 1+r\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 1+r\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = x+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = x + r\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = x\frac{dx_1}{dx}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\frac{dx_1}{dx}dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\left(1+r\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx + r\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= l + r\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = l + r\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = l + r\frac{\pi}{4}$$

作成した類題でもやはり「元の曲線の長さ＋曲線からの隔たり×法線の角の変化」が成り立っていることを確かめられた。

定理の証明　その２

$$\boxed{\text{曲線の長さ} = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

を用いて示す方法である。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(x,\,y)$ における法線上に点 $B(x_1,\,y_1)$ があり、 $AB = r$ かつ $y_1 > y$ を満たす。 x が区間 $a \leqq x \leqq b$ を動くとき、点 A の描く曲線を C_0 、点 B の描く曲線を C_1 とする。

- C_0 の長さを l とすると、

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx \quad \cdots \quad ①$$

- C_0 上の点 $A(x_0, y_0)$ における C_0 の法線ベクトルで大きさが r 、y 成分が正のものは

$$\overrightarrow{n} = \frac{r}{\sqrt{\{f'(x)\}^2 + 1}}\,(-f'(x), 1)$$

であるから、$B(x_1, y_1)$ について、次が成り立つ。

$$(x_1, y_1) = (x, y) + \frac{r}{\sqrt{\{f'(x)\}^2 + 1}}\,(-f'(x), 1)$$

従って、

$$x_1 = x - r \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{\{f'(x)\}^2 + 1}}, \quad y_1 = f(x) + r \cdot \frac{1}{\sqrt{\{f'(x)\}^2 + 1}}$$

- C_1 の長さを L とすると、

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}\, dx \quad \cdots \quad ②$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dx} &= 1 - r \cdot \frac{f''(x)\sqrt{\{f'(x)\}^2 + 1} - f'(x)\frac{2f'(X)f''(x)}{2\sqrt{\{f'(x)\}^2+1}}}{\{f'(x)\}^2 + 1} \\
&= 1 - r \cdot \frac{f''(x)[\{f'(x)\}^2 + 1] - \{f'(x)\}^2 f''(x)}{\sqrt{(\{f'(x)\}^2 + 1)^3}} \\
&= 1 - r \cdot \frac{f''(x)}{\sqrt{(\{f'(x)\}^2 + 1)^3}}
\end{aligned}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = f'(x) - r \cdot \frac{2f'(x)f''(x)}{2\sqrt{(\{f'(x)\}^2 + 1)^3}} = f'(x)\left(\cdot 1 - r \cdot \frac{f''(x)}{\sqrt{(\{f'(x)\}^2 + 1)^3}}\right) = f'(x) \cdot \frac{dx_1}{dx}$$

② に代入して、

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, \frac{dx_1}{dx} dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\left(1 - r \cdot \frac{f''(x)}{\sqrt{(\{f'(x)\}^2 + 1)^3}}\right) dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx - r \cdot \int_a^b \frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2 + 1}\, dx \\
&= l - r \cdot \int_a^b \frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2 + 1}\, dx \quad \cdots \quad ③
\end{aligned}$$

$f'(x) = \tan\theta$ とおくと、 $f''(x)dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$f'(a) = \tan\theta_1, \quad f'(b) = \tan\theta_2$ とおく。 θ_1, θ_2 は $x = a, x = b$ における曲線 C_0 の接線が x 軸の正の向きとなす角である。

このとき、

$$\int_a^b \frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2 + 1}\, dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta_2 - \theta_1$$

③ に代入して、

$$L = l - r(\beta - \alpha) = l + r(\theta_1 - \theta_2)$$

あとは、$x = a$ および $x = b$ における 2 接線のなす角と 2 法線のなす角が等しいこと等を丁寧に述べれば、上の式から定理 $L = l + r\alpha$ が証明できる。//