$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^2}+\quad\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$ について

－　２０２０年慶応大学大学・医学部　入試問題から　－

2020 年 9 月
石動高校　片山　喜美

和泉寛成先生から、２０２０年慶応大学・医学部の入試問題にリーマン・ゼータ関数 $\zeta(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ の $n=2$ における値が $\dfrac{\pi}{6}$ になることに関連した出題があったとの連絡がありました。また、 $\zeta(2)$ に関連した無限級数の値について、和泉先生の計算を送っていただきました。そのことについて、少し書いてみます。

$\zeta(n)=1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^n}+\quad\cdots$ とおく。

次のことが知られています。

- $\zeta(2)=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^2}+\quad\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$
- $\zeta(4)=1+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^4}+\quad\cdots=\dfrac{\pi^4}{90}$
- $\zeta(6)=1+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^6}+\quad\cdots=\dfrac{\pi^6}{945}$
  $\cdots\cdots\cdots$

一般に、
$\zeta(2n)=1+\dfrac{1}{2^{2n}}+\dfrac{1}{3^{2n}}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^{2n}}+\quad\cdots=a_n\cdot\pi^{2n}$　（a_nは有理数）

となることが知られています。

<u>これらの和に π の巾が現れるのは、不思議としか言い様がありません!!</u>

何かの面積や体積に結びつけて「そうなのか」という説明があると面白いのですが、僕の知る限り、そのような説明は存在しないようです。現在の数学を超えた概念とか、物理学との関連とかで、将来、そんな説明が見つかるのかもしれませんが。（なお、僕の知識が狭いだけで、既に説明があるのかもしれません。

$\zeta(2)=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\quad\cdots\quad+\dfrac{1}{k^2}+\quad\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$ を最初に示したのはオイラーで、以下の方法を用いたそうです。$\left(\dfrac{\sin x}{x}\text{のテイラー展開と無限乗積の比較}\right)$

- テイラー展開
  $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \quad \cdots$ 　　より、
  $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \quad \cdots$ 　　①
- 無限乗積
  $\dfrac{\sin x}{x}$ は、 $x = 0$ で分母が 0 になるが、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ であることから、この関数が $= 0$ となるのは、 $\sin x = 0 \quad (x \neq 0)$ をみたす x のときである。

  それは、 $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \quad \cdots$ である。

  従って、定数項が 1 となる無限乗積（無限の因数分解）として、次のように表される。
  $\dfrac{\sin x}{x} = \left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$
  これを展開して、
  $$= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \quad \cdots\right)x^2 + \cdots \qquad ②$$

① と ② の x^2 の係数を比べて
$\dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{\pi^2}\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \quad \cdots\right)$
従って、$1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \quad \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ //

一般の $\zeta(2n)$ の値については、ベルヌイ数に結びつけること、そのベルヌイ数は漸化式で順次求めていけることで得る方法が標準的であると思います。

★片山の漸化式

片山は学生時代の 1984 年に、次の方法を得ました。

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \quad \cdots \quad \frac{1}{k^{2n}} + \quad \cdots = a_n \cdot \pi^{2n}$$

と表すことができ、このとき、数列 $\{a_n\}$ は、次の漸化式をみたす。

$$a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}a_k$$

計算例

- $a_2 = \dfrac{(-1)^{2-1}\cdot 2}{5!} - \dfrac{(-1)^{2-1}}{3!}a_1 = -\dfrac{2}{5!} + \dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{-12 + 4\cdot 5}{6!} = \dfrac{1}{90}$
  $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$

- $a_3 = \dfrac{(-1)^{3-1}\cdot 3}{7!} - \dfrac{(-1)^{3-1}}{5!}a_1 - \dfrac{(-1)^{3-2}}{3!}a_2 = \dfrac{3}{7!} - \dfrac{1}{5!}\cdot\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{90}$

  $= \dfrac{3-7}{7!} + \dfrac{1}{3!\cdot 5\cdot 6\cdot 3} = \dfrac{-12+4\cdot 7}{7!\cdot 3} = \cdots = \dfrac{1}{945}$

  $\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}$

以下、順次計算していくことができます。ただし、どんどん大きな桁の整数を扱うことになり、手計算では大変になってきます。この漸化式を得た当時は、UBASIC という便利な数学用の言語があって、たった 13 行の短いプログラムで、指定したところまでの a_n の値を求めることができました。今だったら、どういった言語で計算させるのがよいのか、調べていません。

★ 2020 年慶応大学・医学部　問題３　及び、和泉先生から届いた解法について

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \quad \cdots \quad + \frac{1}{k^2} + \quad \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

について、2020 年度の慶応大学・医学部の入試問題に出題されていたと和泉先生から連絡がありました。また、和泉先生から別の解法について知らせていただきました。

慶応大学・医学部　 2020 年　問 3

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

関数 $f(x), g(x)$ を $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$,　$g(x) = \dfrac{1}{\tan^2 x}$ と定める。

(1)　定数 a を $a = \boxed{（あ）}$ と定めると、 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = af(2x)$$

が成り立つ。

(2) 自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right), \quad T_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

とおく。このとき、 S_1,　S_2,　S_3 を求めると、

$S_1 = \boxed{（い）}$,　$S_2 = \boxed{（う）}$,　$S_3 = \boxed{（え）}$

である。また、 S_n と S_{n+1} の間には、 $S_{n+1} = \boxed{（お）}$ の関係がある。このことから、S_n を n の式で表すと $S_n = \boxed{（か）}$ となる。また、T_n を n の式で表すと $T_n = \boxed{（き）}$ である。したがって、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ であることに注意すると

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} = \frac{1}{k^2} = \boxed{（く）}$$

がわかる。

基本となる考え方は以下のように整理できるものと思います。

数学 III の教科書では、$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を示すところで、不等式 $\sin\theta<\theta<\tan\theta \quad \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことを使う。この不等式から、

$$\frac{1}{\sin^2\theta}>\frac{1}{\theta^2}>\frac{1}{\tan\theta^2}$$

$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ と置くとき、次の 2 つのことが成り立つ。

- $\dfrac{1}{\tan\theta^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}-1=f(\theta)-1$

  従って、$f(\theta)>\dfrac{1}{\theta^2}>f(\theta)-1$

  さらに、$0<\theta=a_1,a_2,\quad\cdots\quad,a_N<\dfrac{\pi}{2}$ を代入して和をとると、

  $$\sum_{k=1}^{N}f(a_k)>\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k^2}>\sum_{k=1}^{N}f(a_k)-N \qquad\cdots\cdots①$$

  この真ん中の和が $\zeta(2)$ に結びつく。

- $f(\theta)=\dfrac{1}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}\right\}$

  $=\dfrac{1}{4}\left\{f\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)\right\}\qquad\cdots\cdots②$

これらを押さえておいて、$\zeta(2)$ の値の計算に進む。

(1)　慶応大学・医学部の入試問題の方法

区間 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を 2^{n+1} 等分する。区切りの点のうち、左右の端を除いて、

$a_1=\dfrac{1}{2^{n+1}}\pi,\ a_2=\dfrac{2}{2^{n+1}}\pi,\quad\cdots\quad,a_k=\dfrac{k}{2^{n+1}}\pi,\quad\cdots\quad,a_{2^n-1}=\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}}\pi$ とおく。

- ①の中辺 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{a_k^2}=\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{4^{n+1}}{\pi^2k^2}=\frac{4^{n+1}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}\qquad\cdots\cdots③$
- ①の左辺 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1}f(a_k)=S_n$ とおく。

  $a_1,\ a_2,\quad\cdots\quad a_{2^n-2},\ a_{2^n-1}$ について、

  a_1 と a_{2^n-1}, a_2 と $a_{2^n-2},\quad\cdots,a_{2^{n-1}-1}$ と $a_{2^{n-1}+1}$ というふうに組み合わせると、それらはいずれも θ と $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の関係になっていて、② を適用できる。ただし、

  真ん中の $a_{2^{n-1}}=\dfrac{2^{n-1}}{2^{n+1}}\pi=\dfrac{\pi}{4}$ だけは、ペアにできない。

このことを踏まえると、

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \{f(a_k) + f(a_{2^n-k})\} + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

② より、$f(a_k) + f(a_{2^n-k}) = f(a_k) + f\left(\frac{\pi}{2} - a_k\right) = 4f(2a_k) = 4f\left(\frac{k}{2^n}\pi\right)$

また、$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = 2$ であるから、

$$S_n = 4\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f\left(\frac{k}{2^n}\pi\right) + 2 = 4S_{n-1} + 2 \quad (n \geqq 2)$$

$\alpha = 4\alpha + 2$ とおくと、 $\alpha = -\frac{2}{3}$ となるので、$S_n + \frac{2}{3} = 4\left(S_{n-1} + \frac{2}{3}\right) \quad (n \geqq 2)$

従って、 $S_n + \frac{2}{3} = 4^{n-1}\left(S_1 + \frac{2}{3}\right) = 4^{n-1}\left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot 4^n$

$S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1) \quad \cdots\cdots$④

③, ④ を ① に代入して、

$$\frac{2}{3}(4^n - 1) \quad > \quad \frac{4^{n+1}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} \quad > \quad \frac{2}{3}(4^n - 1) - (2^n - 1)$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\pi^2 \quad > \quad \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} \quad > \quad \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\pi^2 - \left(\frac{1}{4\cdot 2^n} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\pi^2$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\pi^2 - \left(\frac{1}{4\cdot 2^n} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\pi^2\right\} = \frac{\pi^2}{6}$$

従って、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$ は単調増加であるから、$\zeta(2) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ //

(2) **和泉先生から届いた方法** （整理の都合上、少し書き換えました）

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ を ② を用いて分割していく。

出てくるのは、区間 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を 2^n 等分したときの奇数番目の点で、そこにおける $f(\theta)$ の値の和をとる形となり、① により $\zeta(2)$ に結び付ける。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right\}$$

ここで、

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right\}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{5\pi}{16}\right)\right\}$$

従って、

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4^2}\left\{f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{5\pi}{16}\right)+f\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right\}$$

$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}\right)$ とおいて上記の式を表すと、

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=T_1=\frac{1}{4}T_2=\frac{1}{4^2}T_3$$

となっている。従って、 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4^{n-1}}T_n \quad \cdots\cdots$ ⑤ となることが予想できる。

このことについては、② を使って式変形をすると、

$$T_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{(2^{n+1}-2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

第 2 の和の f の中の分子の $2^{n+1}-2k+1=2(2^n-k+1)-1$ で、 $l=2^n-k+1$ とおく。

$k=1,\,2,\quad\cdots\quad,2^{n-1}-1,\,2^{n-1}$ のとき、

$l=2^n,\,2^n-1,\quad\cdots\quad,2^{n-1}+2,\,2^{n-1}+1$ となる。 $(2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$ による。)

従って、

$$T_n=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)+\frac{1}{4}\sum_{l=2^{n-1}+1}^{2^n} f\left(\frac{(2l-1)\pi}{2^{n+2}}\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)=\frac{1}{4}T_{n+1}$$

帰納的に ⑤ が成り立つことがわかる。//

① を使うと

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4^{n-1}}T_n \quad > \quad \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left\{\frac{2^{n+1}}{(2k-1)\pi}\right\}^2 \quad > \quad \frac{1}{4^{n-1}}\left(T_n-2^{n-1}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$2 \quad > \quad \frac{4^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{(2k-1)^2} \quad > \quad 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

これにより、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ が言える。

前と同様に、和の単調増加性により。 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

$\displaystyle\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ の絶対収束性により、和の順序を入れ替えてもよいので、

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\quad\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\quad\cdots\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\zeta(2)\end{aligned}$$

よって、

$$\zeta(2)=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6} \qquad //$$

$\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ に関する今回のような証明方法は、初めて見たのかと思います。もしかしたら、若い頃に見たことがあるのかもしれませんが、今回慶応大学の問題を解いた際には記憶にはありませんでした。

同様な方法で $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$ の証明ができるのかどうか。詳しく考えていませんが、うまくいかないような気がします。

僕が学生の頃にみつけた漸化式は、当時、名古屋大学の青本和彦教授が 留数計算に結びつけて考えられた、$\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ の証明が発端になります。同様な方法で $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$ 等の証明ができるのかどうか、何人かの研究者に送られましたが、それが僕の指導教官にも届いて、「考えてみなさい」と僕たちにも与えられたものでした。そこで、青本教授の計算した留数の経路を少し変更したら、一般の $\zeta(2n)$ に結びつけることができたのでした。

$\zeta(2n+1)$ については、1970 年代に 「$\zeta(3)$ は有理数ではない」ということがようやく証明されました。フランスの田舎町に住む Roger Apéry という人が証明したのですが、最先端の数学を用いたものではなく、その程度の証明なら Euler が見つけていても不思議ではないということで、「The proof that Euler missed」 といった表現がなされたそうです。そのしばらく後に、Beukers という数学者が簡明な証明を発表しました。 $\zeta(5), \zeta(7), \quad \cdots$ については、有理数でないことなどが証明されたのかどうか、わかりません。

これらについての証明等は、「数学 Ⅲ ・C とその周辺についてのメモ」（１９９８年富山県高教研発表 pdf file）にまとめてありますので、興味関心のある人は見てください。