「$2^{n+1}+3^{2n-1}\quad (n=1,2,3,\quad \cdots)$ は全て7で割り切れることを示せ。」という問題について

2020年9月8日（火）修正版
石動高校　片山　喜美

大学入試問題を題材に生徒の添削指導をしていた中で、「(3) $7^n-1\quad (n=1,2,3,\quad \cdots)$ は全て6で割り切れることを示せ。」というものがあった。その問題の(1)(2)に比べて(3)としては簡単で、対象生徒は難なく解いてきた。そこで、補充として、「全ての自然数 n について、○○は p で割り切れることを示せ。」という問題を与えようと思って作成したのが、「$2^{n+1}+3^{2n-1}\quad (n=1,2,3,\quad \cdots)$ は全て7で割り切れることを示せ。」であった。その際、こうした問題をどのように作成するのかを話題として提供とするのもいいかもしれないと思い、以下のように何人かの先生に知らせた。そして、若い先生方にも考えてもらったらどうかとも投げかけた。

問題　「$2^{n+1}+3^{2n-1}\quad (n=1,2,3,\quad \cdots)$ は全て7で割り切れることを示せ。」　について

(1) この問題を解け。

(2) このような問題をどのように作成すればよいか。

それを踏まえて、「○○○○　$(n=1,2,3,\quad \cdots)$ は全て11で割り切れることを示せ。」という問題を作成せよ。

1　準備していた解答

(1)　i) その1　数学的帰納法による証明

- $n=1$ のとき　　$2^2+3^1=7$ より正しい。
- $n=k$ のとき正しいと仮定する。このとき、$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N\quad (N$ は整数) とおける。
  $n=k+1$ のときは、
  $2^{k+2}+3^{2k+1}=2\cdot(2^{k+1}+3^{2k-1})-2\cdot3^{2k-1}+3^2\cdot3^{2k-1}=2\cdot7N+(-2+9)\cdot3^{2k-1}$
  $=7(2N+3^{2k-1})$
  従って、$n=k+1$ のときも7で割り切れる。

  数学的帰納法から、すべての自然数 n について、$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は7で割り切れる。//

ii) その２　合同式を利用した証明

$3^2 = 9 \equiv 2 \pmod 7$ より、

$2^{n+1} + 3^{2n-1} = 2^{n+1} + 3^{2(n-1)} \cdot 3 = 4 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1} \equiv 0 \pmod 7$ //

なお、 $3^{2n-1} = 3^{2n} \cdot 3^{-1}$ とすると $3^{-1} = 5$ であることを説明しなければならず、少し手間がかかる。補充問題に対する対象生徒は、このあたりで少し不十分な解答を提出した。

(2) 問題の作成方法 (片山が用いた方法)

$a^{2n-1} + (-a)^{2n-1} = 0$ を使う。

「7 で割り切れる」 のときは、 例えば $a = 3$ とすれば、 $-a \equiv 7 - a = 4 \pmod 7$

従って、$3^{2n-1} + 4^{2n-1}$ とすればよい。

ただし、これだと指数がどちらも $2n-1$ で、見え見えとなるから、$4^{2n-1} = 4 \cdot 4^{2(n-1)}$ とし、 $4^2 = 16 \equiv 2 \pmod 7$ を用いて、$= 3^{2n-1} + 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ とした。

$3^{2n-1} = 3 \cdot 3^{2(n-1)} = 3 \cdot 2^{n-1}$ として、$3 \cdot 2^{n-1} + 4^{2n-1}$ としてもよい。

足して 7 になる 2 つの数としては、2 と 5 の組み合わせもある。

$2^{2n-1} + 5^{2n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} + 5^{2n-1}$

$2^{2n-1} + 5^{2n-1} = 2^{2n-1} + 5 \cdot + 5^{2(n-1)} = 2^{2n-1} + 5 \cdot 4^{n-1}$ などでもよい。

「11 で割り切れる」の場合

□ $2+9 = 11$ より、$-2 \equiv 9 \pmod{11}$ である。従って、 $2^{2n-1}+9^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}$ となる。見え見えにならないように変形を考える。

- $2 \cdot 2^{2(n-1)} + 9^{2n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} + 9^{2n-1}$
- $2^{2n-1} + 9 \cdot 9^{2(n-1)} = 2^{2n-1} + 9 \cdot 4^{n-1}$
  この場合、$4^3 = 64 \equiv 9$ であるから、上式 $\equiv 2^{2n-1} + 4^3 \cdot 4^{n-1} = 2^{2n-1} + 4^{n+2}$ と変形できる。

□ $3 + 8 = 11$ から、$3^{2n-1} + 8^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}$

- $3 \cdot 3^{2(n-1)} + 8^{2n-1} = 3 \cdot 9^{n-1} + 8^{2n-1}$
  この場合、$9^3 = 729 \equiv 3$ であるから、上式 $\equiv 9^3 \cdot 9^{n-1} + 8^{2n-1} = 9^{n+2} + 8^{2n-1}$ と変形できる。
- $3^{2n-1} + 8 \cdot 8^{2(n-1)} = 3^{2n-1} + 8 \cdot 9^{n-1}$

□ $4 + 7 = 11$ から、$4^{2n-1} + 7^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}$

- $4 \cdot 4^{2(n-1)} + 7^{2n-1} = 4 \cdot 5^{n-1} + 7^{2n-1}$
  この場合、$5^3 = 125 \equiv 4$ であるから、上式 $\equiv 5^3 \cdot 5^{n-1} + 7^{2n-1} = 5^{n+2} + 7^{2n-1}$ と変形できる。

- $4^{2n-1}+7\cdot 7^{2(n-1)}=4^{2n-1}+7\cdot 5^{n-1}$

□ $5+6=11$ から、$5^{2n-1}+6^{2n-1}\equiv 0 \pmod{11}$

- $5\cdot 5^{2(n-1)}+6^{2n-1}=5\cdot 3^{n-1}+6^{2n-1}$
  この場合、$3^3=27\equiv 5$ であるから、上式 $\equiv 3^3\cdot 3^{n-1}+6^{2n-1}=3^{n+2}+6^{2n-1}$ と変形できる。
- $5^{2n-1}+6\cdot 6^{2(n-1)}=5^{2n-1}+6\cdot 3^{n-1}$

【注意】　例えば、$2+9$ の場合 $2^{2n-1}+9\cdot 9^{2(n-1)}=2^{2n-1}+9\cdot 4^{n-1}$ とした後に、$9\equiv 4^3 \pmod{11}$ を使ったが、これをどうやってみつけるか。そして、もう一つの変形 $2\cdot 2^{2(n-1)}+9^{2n-1}=2\cdot 4^{n-1}+9^{2n-1}$ では、このようなさらなる変形を行わなかったが、それはなぜか。

それについては、11 を法とする剰余類において、各数の巾について調べておけばわかる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n \pmod{11}$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
$3^n \pmod{11}$	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
$4^n \pmod{11}$	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
$5^n \pmod{11}$	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
$6^n \pmod{11}$	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
$7^n \pmod{11}$	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
$8^n \pmod{11}$	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
$9^n \pmod{11}$	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
$10^n \pmod{11}$	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

$2^{2n-1}+9\cdot 9^{2(n-1)}=2^{2n-1}+9\cdot 4^{n-1}$ としたところで、第 2 項が 4 で統一できたらいいなと思い、上の表を眺めると、$4^3\equiv 9$ があるので、それを使ったのであった。

$2\cdot 2^{2(n-1)}+9^{2n-1}=2\cdot 4^{n-1}+9^{2n-1}$ については、第 1 項を 4 の巾で統一したいと思っても、上の表の 4 の段には、2 が現れないので不可能である。

他の段をみると、$6^9\equiv 2,\ 6^8\equiv 4$ であるから、

$2\cdot 4^{n-1}+9^{2n-1}\equiv 6^9\cdot 6^{8(n-1)}+9^{2n-1}=6^{8n+1}+9^{2n-1}$ とできる。ただし、$n=1$ の 6^9+9 を計算するのも大変である。上の表から、7 や 8 の段でも同様な変形ができる。

<u>備考：原始根について</u>

上の表では、2，6，7，8 の段において、1〜10 の全ての数が現れている。これにより、「$\mathbb{F}_{11}^{\times}=\{1,2,\quad\cdots\quad,10\}$ は、乗法群として巡回群となっている」といえる。そして、2,6,7,8 が生成元とできる。これらを「**mod 11 の原始根**」という。

一般に、素数 p に対して、「$\mathbb{F}_{p}^{\times}=\{1,2,\quad\cdots\quad,p-1\}$ は巡回群となる」ことが知られている。なお、**mod p** の原始根の個数は $\varphi(p-1)$ 個（$1\leqq x\leqq p-1$ で $p-1$ と互いに素な数の個数) であることも知られている。

2　知らせがあった解法等

2.1　(1) $2^{n+1}+3^{2n-1}$ が 7 で割り切れることについて

ベテランの先生たちは、私が準備していた解法 i) と同様な数学的帰納法を用いた証明を知らせてくださった。大学入試問題演習でこのような問題を扱うとき、その解法として標準的なものが数学的帰納法であった。（現在は, 合同式も使うのかどうか、詳しく知らないのであるが。）

若手の先生たちからは、合同式の解法をもらった。そして、数学的帰納法の解答はなかった。このような大学入試問題を授業で取り扱った経験がないからかもしれない野かとも思ったが、若いある先生に聞いたら、数学的帰納法で解答するのが標準ではという意見だった。若い人は合同式に馴染みが深いのか。私が準備した合同式による解法とその類似の他、次のような解法があった。（石動高校講師の N 先生による）

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$2^{n+1} \pmod 7$	4	1	2	4	1	2	$\cdots$
$3^{2n-1} \pmod 7$	3	6	5	3	6	5	$\cdots$
$2^{n+1}+3^{2n-1} \pmod 7$	0	0	0	0	0	0	$\cdots$

上の表からわかるように、2^{n+1} は、 $4,1,2$ を繰り返す。（周期的である。）また、2^{n+1} は、 $3,6,5$ を繰り返す。上の表より、 $n=1,2,3$ で成り立ち、かつ、その後は繰り返しになるので、全ての n について、$2^{n+1}+3^{2n-1} \equiv 0 \pmod 7$ //

これはなかなかシンプルな解法である。

2.2　(2) 問題の作成方法について

(i)　数学的帰納法による証明に関連づけた方法

ベテランの N 先生（県民カレッジ砺波地区センター）、I 先生（砺波高校他の講師）から届いたのは、数学的帰納法で n のときに成立することを仮定し、 $n+1$ のときに成り立つことを示すステップに関連づけた問題作成法であった。たとえば、7 で割り切れるものを 2 と 3 の巾の和で考える。

- $n=1$ の時に成り立つように $2^a+3^b \equiv 0 \pmod 7$ となる a, b を考える。 例えば $2^2+3^1=7$ なので、 $a=2, b=1$ が条件を満たす。（ $2^3+3^3=8+27=35$ などでもよい。）
- 2 と 3 の巾がこれらを初項とする等差数列になるものと考える。そして、第 n 項を $2^{a+c(n-1)}+3^{b+d(n-1)}$ として、これが 7 で割り切れるものとする。
  第 $n+1$ 項を第 n 項に結びつけるために、次の式変形をする。
  $2^{a+cn}+3^{b+dn}=2^c\cdot(2^{a+c(n-1)}+3^{b+d(n-1)})+(-2^c+3^d)\cdot 3^{b+d(n-1)}$
  従って、(-2^c+3^d) の部分が 7 で割り切れると、第 $n+1$ 項も 7 で割り切れる。
  例えば、$-2^1+3^2=7$ であるから、 $c=1, d=2$ が適する。

以上から、「 $2^{2+(n-1)}+3^{1+2(n-1)}=2^{n+1}+3^{2n-1}$ は、全ての自然数 n について 7 で割り切れる。」という問題が作成できることになる。

この方法をまとめると、以下のようになる。

☆　$2^a+3^b \equiv 0 \pmod p$ かつ $-2^c+3^d \equiv 0 \pmod p$ となる a,b,c,d が存在するとき、$2^{a+c(n-1)}+3^{b+d(n-1)}$ は全ての自然数 n について p で割り切れる。

$p=11$ について、例えば $2^3+3^1=11, -2^4+3^3=11$ であるから、$2^{3+4(n-1)}+3^{1+3(n-1)}=2^{4n-1}+3^{3n-2}$ は 11 で割り切れる。

県民カレッジ砺波地区センターの N 先生は、この方法で $p=5,17,19$ の時の問題作成例も挙げてくださった。結果だけを以下に述べる。

$2^{3n-2}+3^n \equiv 0 \pmod 5,\quad 2^{6n-3}+3^{4n-2} \equiv 0 \pmod{17},\quad 2^{3n+1}+3^{3n-2} \equiv 0 \pmod{19}$

2 と 3 以外の数の巾の和で考えてもよい。

☆　$x^a+y^b \equiv 0 \pmod p$ かつ $-x^c+y^d \equiv 0 \pmod p$ となる x,y,a,b,c,d が存在するとき、$x^{a+c(n-1)}+y^{bZ+d(n-1)}$ は全ての自然数 n について p で割り切れる。

例　$2^3+5^2=33 \equiv 0 \pmod{11}, 2^4-5^1=11 \equiv 0 \pmod{11}$ より、$2^{3+4(n-1)}+5^{2+(n-1)}=2^{4n-1}+5^{n+1}$ は全ての自然数 n について 11 で割り切れる。

巾の組み合わせを見つけるには、以下の表（再掲）を眺めるとよい。特に, $\mathbb{F}_{11}^{\times}$ の生成元である数（巾に全ての数が現れるところ）を用いると、必ずうまい組み合わせをみつけることができる。そうでない数どうしの組み合わせでは、うまくいかないところもある。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n \pmod{11}$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
$3^n \pmod{11}$	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
$4^n \pmod{11}$	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
$5^n \pmod{11}$	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
$6^n \pmod{11}$	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
$7^n \pmod{11}$	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
$8^n \pmod{11}$	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
$9^n \pmod{11}$	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
$10^n \pmod{11}$	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

県民カレッジ砺波地区センターの N 先生からは、いくつかの問題作成例を知らせていただいた。

(ii)　合同式に結びつける方法　その 1（南砺福光高校 S 先生より）

南砺福光高校の中村校長から、「若手の S 先生に知らせたら、解答の提出があった」と連絡があった。

S 先生は、まず (1) の、$2^{n+1}+3^{2n-1}$ が 7 で割り切れることについて、

$= 2^2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 9^{n-1} \equiv 4 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1} \equiv 0 \pmod 7$

という証明を与えている。

この解法に結びつけて

$A \cdot C^{n-1} + B \cdot D^{n-1}$ として表される数で、$A + B \equiv 0 \pmod p$ かつ $C \equiv D \pmod p$ となるものを見つけると

上式 $\equiv A \cdot C^{n-1} + B \cdot C^{n-1} \equiv (A+B) \cdot C^{n-1} \equiv 0 \pmod p$

S 先生は、$A = 5^2 \equiv 3, \quad C = 5, \quad B = 2^3 = 8, \quad D = 2^4 \equiv 5$ として、

$5^2 \cdot 5^{n-1} + 2^3 \cdot 2^{4(n-1)} \equiv 5^{n+1} + 2^{4n-1}$ を作問例としてあげている。

その他にも、上の巾の表を眺めながらいくつかの例が作れる。

- $2^3 + 3^1 \equiv 0, \quad 2^4 \equiv 3^3 \equiv 5$ より、$2^3 \cdot 2^{4(n-1)} + 3^1 \cdot 3^{3(n-1)} \equiv 2^{4n-1} + 3^{3n-2}$
- $6^4 + 7^3 = 1296 + 343 = 1639 = 11 \times 149 \equiv 0 \pmod{11}, \quad 6^3 = 216 \equiv 7$ より、$6^4 \cdot 6^{3(n-1)} + 7^3 \cdot 7^{n-1} \equiv 6^{3n+1} + 7^{n+2}$

他にもある。ただし、表から 3 と 4 や 3 と 5 などの組み合わせでは不可能なことがわかる。

(iii) 合同式に結びつける方法　その 2（石動高校講師 N 先生の方法を解読）

- 上の表の 2 の段と 3 の段を眺めると
  $2^1 + 3^2 \equiv 0, \quad 2^3 + 3^6 \equiv 0, \quad 2^5 + 3^{10} \equiv 0, \quad 2^7 + 3^4 \equiv 2^7 + 3^{14} \equiv 0, \quad 2^9 + 3^8 \equiv 2^9 + 3^{18} \equiv 0$ となっている。
  周期性を踏まえると、$2^{1+2(n-1)} + 3^{2+4(n-1)} = 2^{2n-1} + 3^{4n-2} \equiv 0 \pmod{11}$
- 上の表の 2 の段と 5 の段を眺めると
  $2^1 + 5^4 \equiv 0, \quad 2^3 + 5^7 \equiv 0, \quad 2^5 + 5^{10} \equiv 0, \quad \cdots$ となっている。
  周期性を踏まえると、$2^{1+2(n-1)} + 5^{4+3(n-1)} = 2^{2n-1} + 5^{3n+1} \equiv 0 \pmod{11}$
- それ以外にも $2^{1+(n-1)} * 6^{4+9(n-1)} = 2^n + 6^{9n-5}, \quad 2^{2+(n-1)} + 7^{1+3(n-1)} = 2^{n+1} + 7^{3n-2}, \quad \cdots$ など、表から見つけることができる。

この方法は、具体的な数値から一般法則を見つけていくような感じで、高校生に数値実験をさせてみるのも面白いのではないかと思った。

3　新たな課題

ここまで、2 つの巾の和で p で割り切れるものを考えてきた。それでは、3 つの巾の和ではどうだろうか？

例えば、「$2^{2n-1} + 3^{4n-3} + 6^{8n-7}$ は全ての自然数 n について 11 で割り切れる」について

(1) この問題は正しいか。正しければその証明を、間違っているなら反例を与えよ。

(2) このような問題をどのように作成すればよいか。

それを踏まえて、「○+○+○　$(n = 1, 2, 3, \quad \cdots)$ は全て 11 で割り切れることを示せ。」という別の問題や 11 を他の数に変えた問題等を作成せよ。

3 つの巾の和になると難しいのか、それとも 2 つの和の場合と変わらないのか、どうであろうか？（現時点では、ここで終わりにします）