一次不定方程式 $ax+by=m$ の自然数解について

2020 年 7 月
8 月改訂
富山県立石動高校　片山　喜美

はじめに

a, b を互いに素な 2 つの自然数とすると、不定方程式 $ax+by=1$ は x, y が整数の解をもつ。ユークリッドの互除法を使えば、具体的に 1 つの整数解 $x=x_0, y=y_0$ を求めることができる。また、一般の解は $x=x_0+bn, y=y_0-an$ （n は整数 ）とできる。

任意の整数 m について、$ax+by=m$ を満たす整数解については、

- $ax+by=1$ の整数解の 1 つ $x=x_0, y=y_0$ を用いて、$a(mx_0)+b(my_0)=m$ となる。
- 一般解は $x=mx_0+bn, y=my_0-an$ （n は整数 ）とできる。

さて、x, y をともに自然数に限ると、 $ax+by \geqq a+b \geqq 5$ であるから、$ax+by=1$ とすることはできない。では、x, y がともに自然数のときに $ax+by$ で表すことができる自然数はどのようなものか。表すことができない自然数はどのようなものか。次のことが成り立つ。

1. $m>ab$ ならば $ax+by=m$ を満たす自然数 x, y が存在する。
   なお、$x, y \geqq 0$ とすれば $m \geqq ab$ について整数解が存在する。
2. $ax+by=m$ を満たす自然数 x, y の組がちょうど $k+1$ 個となるときの m の最小値は $kab+a+b$ で、最大値は $(k+2)ab$ である。
3. $x, y \geqq 0$ のとき、$ax+by$ として表すことができない自然数の個数は $\dfrac{1}{2}(a-1)(b-1)$ である。

大学入試でも、$ax+by=m$ に関する出題がある。中には、整数解を求めさせる出題だけでなく、さらなる性質に関わる出題も見られる。。例えば、2016 年の福井大学で、「$65x+31y=m$ は $m \geqq 2016$ のとき必ず自然数解を持つことを示せ」という問題があった。これが上記の 1 に関係する。

また、2020 年の新潟大学では「$70x+130y=m$ を満たす正の整数 x, y の組がちょうど 3 組あるときの m の最小値を求めよ」という問題があった。（南砺福光高校の N 先生に教えてもらった。）この問題の答えは、最小値 $m=2020$ である。どうしたらこのような作問ができるのか、しばらく考えて上記 2 が成り立つことがわかった。それを用いると、来年の出題としては、「$5x+336y=m$ を満たす正の整数 x, y の組がちょうど 2 組あるときの m の最小値を求めよ」とすればよい。

さらに、m の最大値については $(k+2)ab$ であることがわかった。それを踏まえると、「$2x+337y=m$ が正の整数 x,y の解の組をちょうど 3 個持つときの m の最大値を求め

よ。」とすると、年度にちなんだ問題になる。

上記3については、「$ax+by=m$ が自然数の解を1組持つ」という条件に関わる。$k+1$ 組持つときの最小値 $m=kab+a+b$ で $k=0$ とすると $m=a+b$ で、これは $x=y=1$ を解に持つ。だからといって、$m \geqq a+b$ を満たす全ての m に対する自然数解があるかというと、そうではない。例えば、$5x+3y=m$ で $m=6$ の解は、$x=0+3n,\, y=2-5n$ で、自然数解をもたない。$m=7$ についても、$X=2+3n,\, -1-5n$ で自然数解をもたない。上記1より、$m>ab$ なら必ず持つので、$m \leqq ab$ について考えていく。なお、この問題は「桶に油を戻さない油分け算」に関係づけられる。また、ある曲線の「ブローイングアップによる特異点解消の悪質度」ということにつながっている。

これらについて、考察したことを以下に述べる。

1　$ax+by=m \quad m>ab, \quad x,\, y \in \mathbb{N}$ について

次の大学入試問題から始める。(この問題は、生徒が質問に来た参考書に載っていたものである)

福井大学 2016 年　教育地域科学科　第 1 問

次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $65x+31y=1$ の整数解ををすべて求めよ。

(2)　$65x+31y=2016$ を満たす正の整数の組 $(x,\, y)$ を求めよ。

(3)　2016 以上の整数 m は、正の整数 $x,\, y$ を用いて $m=65x+31y$ と表せることを示せ。

解答例）

(1)　ユークリッドの互除法から導かれる計算により、 $x=-10,\, y=21$ が1つの解であることがわかる。

一般解は $x=-10+31n,\, y=21-65n \quad (n \in \mathbb{Z})$　　　(詳細は略)

(2)　$2016=65\times 31+1=65\times 31+\{65\times(-10)+31\times 21\}=65\times 21+31\times 21$

従って、$x=21,\, y=21$ が1つの解となる。一般解は $x=21+31n,\, y=21-65n$

$x>0,\, y>0$ とすると、$-\dfrac{21}{31}<n<\dfrac{21}{65}$　　これを満たす整数は $n=0$ のみ。

従って、求める答えは $x=21,\, y=21$ のみ。

※　問題文からは「解を1つ求めよ」なのか、「解をすべて求めよ」なのか、判別しづらい。

(3)　$65\times(-10)+31\times 21=1$ であるから、$65\times(-10m)+31\times 21m=m$

従って、 $x=-10m, y=21m$ が 1 つの解で、一般解は $x=-10m+31n, y=21m-65n \quad (n\in\mathbb{Z})$ とできる。

x, y がいずれも正の整数となるとき、 $x=-10m+31n>0, \quad y=21m-65n>0$

従って、 $\dfrac{10m}{31}<n<\dfrac{21m}{65} \quad \cdots$①。

区間 ① の幅は、$\dfrac{21m}{65}-\dfrac{10m}{31}=\dfrac{31\times 21m-65\times 10m}{65\times 31}=\dfrac{m}{2015}\geqq\dfrac{2016}{2015}>1$

幅が 1 より大きな区間 ① には少なくとも一つの整数 n が存在する。すなわち、正の整数解 $x=-10m+31n, y=21m-65n$ が存在する。　//

(別解)　$65\times(-10m)+31\times 21m=m$ である。これを元に、 y が最小正の整数解となるときを考える。 そのために、$21m$ を 65 で割って $21m=65q+r \quad (q, r\in\mathbb{Z}, \quad 0<r\leqq 65)$ とする。

注意.　普通は、割り算の余りとして、 $0\leqq r<65$ とするのだが、もし $r=0$ となったなら、 q を 1 減らして $r=65$ にする。

$m=65\times(-10m)+31\times(65q+r)=65\times(-10m+31q)+31r$

ここで、$65(-10m+31q)=65\times(-10m)+31\times 65q=65\times(-10m)+31\times(21m-r)=(-650+651)m-31r\geqq m-31\times 65\geqq 2016-2015\geqq 1$

従って、$x=-10m+31q$ は正の整数である。

すなわち、$65x+31y=m$ は $m\geqq 2016$ のとき正の整数解 $x=-10m+31q, \quad y=r$ を持つ。　//

この入試問題の (3) に関することは、一般に次の定理となる。

定理 1.1　a, b は互いに素な 2 つの自然数とする。

一次不定方程式 $ax+by=m$ は $m>ab$ のとき、自然数の解 x, y を持つ。

証明 1）　a, b が互いに素な自然数であるとき、任意の整数 m について、$ax+by=m$ は整数解をもつ。その 1 つを $x=x_1, \quad y=y_1$ とすると、一般解は $x=x_1+bn, \quad y=y_1-an \quad (n\in\mathbb{N})$ とできる。x, y ともに正となるような整数 n を取ることができればよい。

$x=x_1+bn>0, \quad y=y_1-an>0$ とすると、$-\dfrac{x_1}{b}<n<\dfrac{y_1}{a}$

この区間の幅は、$\dfrac{y_1}{a}-\left(-\dfrac{x_1}{b}\right)=\dfrac{ax_1+by_1}{ab}=\dfrac{m}{ab}>1 \quad (\because m>ab)$

幅が 1 より大きな区間には少なくとも 1 つの整数 n が含まれる。従って、正の整数解 x, y が存在する。　//

証明 2）　a, b が互いに素な自然数であるとき、任意の整数 m について、$ax+by=m$ は整数解をもつ。その 1 つを $x=x_1, \quad y=y_1$ とする.。これを元に、 y が最小正の

整数解を考える。 そのために、y_1 を a で割って $y_1 = aq+r \quad (q, r \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r \leqq a)$ とする。

$m = ax_1 + by_1 = ax_1 + b(aq+r) = a(x_1+bq) + br$

ここで、 $a(x_1+bq) = ax_1 + abq = ax_1 + b(y_1 - r) = (ax_1+by_1) - br = m - br > ab - ab = 0$

従って、$x = x_1 + bq$ は正の整数である。

すなわち、正の整数解 $x = x_1 + bq, \quad y = r$ を持つ。 //

2 $ax+by=m$ がちょうど $k+1$ 個の自然数解をもつときの m の最小値及び最大値について

2.1 新潟大学の入試問題から

このことについて考えたきっかけは、次の大学入試問題である。

新潟大学 2020 年　理・工・医・歯　第 2 問

m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの最小値を m_0 とする。 m_0 の値を求めよ。

(2) (1) で求めた m_0 に対して、方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3) 次の条件を満たす m の最小値を求めよ。
方程式 $70x+130y=m$ は、x, y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

解答例）

(1) $m_0 = 10$ （詳細略）

(2) $x = 2 + 13n, \quad y = -1 - 7n \quad (n$ は整数)　　（詳細略）

(3) $70x+130y$ は 10 の倍数であるから、$m = 10m'$ とおける。このとき、$7x+13y=m'$ である。

$gcd(7,13) = 1$ であるから、$x = 2m', \quad y = -m'$ が 1 つの解で、一般解は $x = 2m' + 13n, \quad y = -m' - 7n \quad (n \in \mathbb{Z})$ である。

x, y がともに正の整数であることから $x = 2m' + 13n \geqq 1, \quad y = -m' - 7n \geqq 1$

従って、 $\dfrac{-2m'+1}{13} \leqq n \leqq \dfrac{-m'-1}{7} \quad \cdots ①$

区間 $\alpha \leqq n \leqq \beta$ の中に3つの整数が含まれる条件を考える。最小の整数を n_1 とすると、残りは、 $n_1+1,\, n_1+2$ で　$\alpha \leqq n_1$ かつ $n_1+2 \leqq \beta$。従って、区間の幅は $\beta-\alpha \geqq (n_1+2)-n_2=2$。ただし、これは必要条件であり、十分条件ではない。例えば、$0.1 \leqq n \leqq 2.1$ の幅は2であるが、含まれる整数は $n=1,\,2$ の2つしかない。

① の区間について、$\dfrac{-m'-1}{7}-\dfrac{-2m'+1}{13} \geqq 2$ が必要である。

$\dfrac{(-13m'-13)-(-14m'+7)}{7\times 13}=\dfrac{m'-20}{91} \geqq 2$

$m' \geqq 182+20=202$

この範囲の最小値 $m'=202$ について考えると、① は $\dfrac{-403}{13} \leqq n \leqq \dfrac{-203}{7}$,

$\therefore \quad -31 \leqq n \leqq -29$

$n=-31,\,-30,\,-29$ となるので、$x=2m'+13n, \quad y=-m'-7n$ に代入して、ちょうど3組の正の整数解 $(x,\,y)=(1,\,15),\,(14,\,8),\,(27,\,1)$ をもつ。

従って、$m'=202$ が最小値であるといえる。$m=10m'$ であるから、m の最小値は2020である。

（別解）最初は、上記のような結構面倒な解答を作成した。一般解を与える n が、3つ存在することを示すところで入試問題の解答としては終わってもよい。さらに3組の正の整数解 $(x,\,y)=(1,\,15),\,(14,\,8),\,(27,\,1)$ まで求めてみると、m が最小となるのは $x=1$ のものから3つで、3つ目が $y=1$ であるものになればよいことがわかる。それに基づいた簡単な解答を述べる。（このプリントを作成している途中に気がついたものである。）

$7x+13y=m'$ を満たす3つの正の整数の組が $(x,\,y)=(1,\,Y),\,(14, Y-7),\,(27, Y-14)$ で $Y-14=1$ となれば、 m' が最小となる。

$Y=15$ となり、 $m'=7\cdot 27+13\cdot 1=189+13=202$

$\underline{m=10m'=2020}$

（T君の解答）福井大学の問題を質問に来たT君に新潟大学の問題に取り組んでもらったら、以下のような解答の提出があった。考え方は上記の別解と同じ考えであるが、すっきりした解答になっている。

3つの正の整数の解の真ん中のものを $(X,\,Y)$ とおくと、残りの2つは

$(X-13,\,Y+7),\,(X+13,\,Y-7)$ となる。これらが正の整数の組になることから、$X-13 \geqq 1$ かつ $Y-7 \geqq 1$ となる。従って、$X=14,\,Y=8$ のときが最小である。

$m'=7\cdot 14+13\cdot 8=98+104=202, \quad \underline{m=10m'=2020}$

2.2 $ax+by=m$ がちょうど $k+1$ 個の自然数解をもつときの m の最小値について

福井大学も、新潟大学も入試年度にちなんだ出題であった。福井大学の問題については、$2015=5\cdot13\cdot31$ と因数分解されることから $5\cdot13=65$ と 31 を係数に用いたのだとわかる。$13x+155y$ や $5x+403y$ でもよい。65 と 31 の方が大きさが似ているのでバランスがとれているくらいか。

新潟大学の設定については、2020 が 10 の倍数であるから、202 で考える。では、202 についてなぜ係数が 7 と 13 なのか？

それを解明するために、一般的に成り立つ性質について、以下のように考えてみた。

区間 $\dfrac{-2m'+1}{13} \leqq n \leqq \dfrac{-m'-1}{7}$ の中に 3 つの整数 n が含まれる必要条件として、

$\dfrac{-m'-1}{7}-\dfrac{-2m'+1}{13} \geqq 2$ として、$m' \geqq 202$ を得た。その範囲の最小値 $m'=202$ のとき、区間の下端 $\dfrac{-2m'+1}{13}=-31$ と　上端 $\dfrac{-m'-1}{7}=-29$ がともに整数となる。

では、正の整数解の個数を変えてみたらどうか。例えば、正の整数解が 2 つとして、この区間に 2 つの整数が含まれる必要条件を考えるとどうなるか？

$\dfrac{-m'-1}{7}-\dfrac{-2m'+1}{13} \geqq 1$ として、$\dfrac{m'-20}{91} \geqq 1,\quad m' \geqq 111$

最小値 $m'=111$ のとき、区間の下端 $\dfrac{-2m'+1}{13}=\dfrac{-221}{13}=-17$。

上端 $\dfrac{-m'-1}{7}=\dfrac{-112}{7}=-16$。下端、上端とも整数となり、ちょうど 2 つの整数が含まれる。

4 つの整数が含まれるときには、同様の考え方で、$m' \geqq 91\times3+20=293$

最小値 $m'=293$ のとき、区間の下端 $\dfrac{-2m'+1}{13}=\dfrac{-585}{13}=-45$。

上端 $\dfrac{-m'-1}{7}=\dfrac{-294}{7}=-42$。下端、上端とも整数となり、ちょうど 4 つの整数が含まれる。

以上のように計算してみると、個数が $k+1$ 個のとき、 m' で表される n の区間が満たすべき必要条件の「上端－下端 $\geqq k$」から出る m' の範囲の最小値のときに、 n に課せられている区間の下端、上端がともに整数となるのだろうと予想される。

さらに、係数が 7 と 13 の場合に限らず、一般の $ax+by=m$ についても、同様のことが成り立つのではないかと思われる。こうして、以下の定理が成り立つことがわかった。

定理 2.1　 a, b を互いに素な 2 つの自然数とする。

方程式 $ax+by=m$ が x, y ともに正の整数である解をちょうど $k+1$ 個もつような自然数 m の最小値は $m=kab+a+b$ である。

このとき、整数解は $(x, y)=(1, 1+ak), (1+b, 1+a(k-1)), \quad \cdots \quad, (1+bk, 1)$ である。

証明）　$ax+by=1$ の 1 つの解を $x=x_0, y=y_0$ として、 $a(mx_0)+b(my_0)=m$ とな

る。従って、 $ax+by=m$ の一般解を $x=mx_0+bn,\quad y=my_0-an\quad(n\in\mathbb{Z})$ と表すことができる。

$x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ として、$\dfrac{-mx_0+1}{b}\leqq n\leqq\dfrac{my_0-1}{a}\quad\cdots$①

この区間に $k+1$ 個の整数が含まれるには、少なくとも区間の幅が k 以上となることが必要である。従って、 $\dfrac{my_0-1}{a}-\dfrac{-mx_0+1}{b}\geqq k$ となる。

$\dfrac{a(mx_0)+b(my_0)-a-b}{ab}\geqq k$ 、 $\quad m-(a+b)\geqq kab$

従って、 $m\geqq kab+a+b$

この区間の最小値 $m=kab+a+b$ のときについて、

下端 $=\dfrac{-mx_0+1}{b}=\dfrac{-(kab+a+b)x_0+1}{b}=\dfrac{-kabx_0-bx_0+(-ax_0+1)}{b}=\dfrac{-kabx_0-bx_0+by_0}{b}$
$=-kax_0+y_0-x_0$

上端 $=\dfrac{my_0-1}{a}=\dfrac{(kab+a+b)y_0+1}{a}=\dfrac{kaby_0+ay_0+(bx_0-1)}{a}=\dfrac{kaby_0+ay_0-ax_0}{a}$
$=kby_0+y_0-x_0=k(-ax_0+1)+y_0-x_0=(-kax_0+y_0-x_0)+k=$ 下端 $+k$

上端、下端とも整数であり、かつ　上端−下端 $=k$ であるから、区間に $k+1$ の整数を含む。

従って、最小値は $m=kab+a+b$ である。

この m について、下端の $n=-kax_0+y_0-x_0$ を代入する。

$x=mx_0+bn=(kab+a+b)x_0+b(-kax_0+y_0-x_0)=(kab+a+b-kab-b)x_0+bx_0=ax_0+by_0=1$

$y=my_0-an=(kab+a+b)y_0-a(-kax_0+y_0-x_0)=(ka^2+a)x_0+(kab+a+b-a)y_0=(ka+1)(ax_0+by_0)=ka+1$

従って、下端の n に対応するのは $(x,\,y)=(1,\,1+ka)$ である。

それを基準に x は b ずつ増加し、 y は a ずつ減少するので、整数解は $(x,\,y)=(1,1+ak),\,(1+b,\,1+a(k-1)),\quad\cdots\quad,(1+bk,\,1)$ である。 //

新潟大学の (3) に対する別解のように、次のような簡単な証明に後で気づいた。

別証明)　正の整数解の個数がちょうど $k+1$ 個となるとき、正の整数解の x の最小値が 1 であるもの $(1,\,Y)$ からはじめて x を b ずつ増やし、y を a ずつ減らして $k+1$ 番目は $(1+kb,\,Y-ka)$

このとき　$y=1$ となるときが、 m の最小値であるから、 $Y-ka=1$

$\therefore m=a(1+kb)+b=kab+a+b\quad//$

2.3　$ax+by=m$ がちょうど $k+1$ 個の自然数解をもつときの m の最大値について

南砺福光高校の N 先生から、「$7x+13y=m'$ がちょうど 3 個の自然数解を持つときについて、T 君の考え方を用いると、 m の最大値は 364 になることがわかりますね。」というメールをもらった。

一般には次の定理が成り立つ。

定理 2.2　a, b を互いに素な 2 つの自然数とする。
方程式 $ax + by = m$ が x, y ともに正の整数である解をちょうど $k+1$ 個もつような自然数 m の最大値は $m = (k+2)ab$ である。

証明）　$(X, Y), (X+b, Y-a), (X+2b, Y-2a), \quad \cdots \quad, (X+kb, Y-ka)$ を $ax+by=m$ の連続する $k+1$ 個の整数解であるとする。
これらが自然数解であり、これらより x が小さな自然数の解が無い条件は $X - b \leqq 0$ である。従って、$X \leqq b$。
また、これらより y が小さな自然数の解が無い条件は $(Y - ka) - a \leqq 0$ である。従って、$Y \leqq (k+1)a$。
従って、 m が最大となるのは、 $X = b, y = (k+1)a$ のときで、最大値は $m = a \cdot b + b \cdot (k+1)a = (k+2)ab$ となる。//

2.4　m の最大値・最小値についてのまとめ

ここまでは、考察してきた順に書いたが、定理およびその証明について、整理して次のように簡潔にまとめておくのがよいだろう。

定理 2　a, b を互いに素な 2 つの自然数とする。
方程式 $ax + by = m$ が x, y ともに正の整数である解をちょうど $k+1$ 個もつような自然数 m の最小値は $m = kab + a + b$ で、最大値は $m = (k+2)ab$ である。

証明）　$(X, Y), (X+b, Y-a), (X+2b, Y-2a), \quad \cdots \quad, (X+kb, Y-ka)$ を $ax+by=m$ の連続する $k+1$ 個の整数解であるとする。

- 最小値について、
  これらが自然数である条件は、 $x \geqq 1$ かつ $Y - ka \geqq 1$ である。

  従って、 m が最小になるのは、$X = 1, y = ka + 1$ のときで、最小値は $m = a \cdot 1 + b \cdot (ka+1) = kab + a + b$ である。//

- 最大値について
  これらが自然数解であり、これらより小さな自然数 x の解が無い条件は $X - b \leqq 0$ である。従って、$X \leqq b$。

  また、これらより小さな自然数 y の解が無い条件は $(Y - ka) - a \leqq 0$ である。従って、$Y \leqq (k+1)a$。

  従って、 m が最大となるのは、 $X = b, y = (k+1)a$ のときで、最大値は $m = a \cdot b + b \cdot (k+1)a = (k+2)ab$ となる。//

2.5 年度にちなんだ作問について

新潟大学では、どのように年度にちなんだ $ax+by=m$ の問題を作ったのか考えてみた。

(1) 2020 年度

10 で割って $ax+by=202$ として、 $202=kab+a+b$ を考えればよい。

両辺を k 倍して、 $202k=k^2ab+ka+kb \quad \therefore \underline{(ka+1)(kb+1)=202k+1}$

- $k=1$ のとき
  $(a+1)(b+1)=203=7\cdot 29 \quad a=6, \quad b=28$ で互いに素にならず、不適。
- $k=2$ のとき
  $(2a+1)(2b+1)=405=3^4\cdot 5$

$2a+1$	5	$3\cdot 5$	$3^2\cdot 5$	$3^3\cdot 5$
$2b+1$	3^4	3^3	3^2	3
a	2	7	22	67
b	40	13	4	1

$gcd(a,b)=1$ となるのは、 $a=7, b=13$ である。このことから $70x+130y$ を題材にして、2020 を答えにもつ作問ができたものと思われる。

(2) 2021 年度

$kab+a+b=2021$ から上のときと同様に $\underline{(ka+1)(kb+1)=2021k+1}$

- $k=1$ のとき
  $(a+1)(b+1)=2022=2\cdot 3\cdot 337$ (337 は素数)

$a+1$	2	3	$2\cdot 3$
$b+1$	$3\cdot 337$	$2\cdot 337$	337
a	1	2	5
b	1010	673	336

$gcd(a, b)=1$ となるのは、$(a, b)=(2, 673), (5, 336)$ の 2 つ。

従って、「$2x+673y=m$ もしくは $5x+336y=m$ について、正の整数 x, y の組がちょうど 2 つとなる m の最小値を求める問題」とすればよい。

(3) 2022 年度

$2022=2\cdot 3\cdot 337$ (337 は素数) である。 最大値 $m=(k+2)ab$ を用いることとして、$k=1, a=2, b=337$ とすれば、

「$2x+337y=m$ が自然数 x, y の解の組をちょうど 2 個もつときの m の最大値を求めよ。」 となる。

※ 「$3x+337y=m$ がちょうど 1 個」「$2x+3y=m$ がちょうど 336 個」の最大値 m でもよい。

課題 他の年度（例えば 2023 年度）にちなんだ問題を作ってみよ。

3　$ax+by$　(x, y は0以上の整数)　で表すことができない数の個数について

a, b を互いに素な2つの自然数として、 $ax+by=m$　(x, y は0以上の整数) について考える。これまで示したことから、

- $m>ab$ ならば、自然数解をもつ。
- $m=ab$ については、 $(x,\,y)=(a,\,0),\,(0,\,b)$ の2つの解をもつ。

従って、表すことができない数は $0<m<ab$ を満たすものである。
従って、$0 \leqq x \leqq b,\, 0 \leqq y \leqq a$ に限って考える、。
$5x+7y=m$ について、$0 \leqq x \leqq 7,\, 0 \leqq y \leqq 5$ の範囲で数表を作る。

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	5	10	15	20	25	30	35
1	7	12	17	22	27	32	37	42
2	14	19	24	29	34	39	44	49
3	21	26	31	36	41	46	51	56
4	28	33	38	43	48	53	58	63
5	35	40	45	50	55	60	65	70

この表の中で、 $ab=35$ になるのは、$(x,\,y)=(7,\,0),\,(0,\,5)$ の2つ。
35未満は、

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 14, 19, 24, 29, 34, 21, 26, 31, 28, 33$$

35より大きいものは

$$37, 42, 39, 44, 49, 36, 41, 46, 51, 56, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70$$

35未満のものと35より大きいものは23個ずつで同数である。一般の $ax+by=m$　$(0 \leqq x \leqq b,\, 0 \leqq y \leqq a)$ についても、 $0 \leqq m<ab$ となるものと、 $m>ab$ となるものが同数となるが、それは、ある対称性から導かれる。

上の数の並びは、表の各行の左端から条件をみたすものを順に抽出したものだが、35未満となるものの $0, 5,\quad \cdots\quad, 28, 33$ に対して、35を超えるものを一番大きい70から逆に戻って $70, 65,\quad \cdots\quad, 42, 37$ として対応してみると、いずれも和が70になっている。

これらについては、$n=ax+by$ に対して、 $n'=a(b-x)+b(a-y)$ と対応させていることがわかる。このとき、 $n+n'=2ab$ となっている。

前節で示したことから、自然数解を2個もつ最小の m の値は $m=ab+a+b>ab$ であるから、$x=0, y=a$ と $x=b, y=a$ で $m=ab$ が2通りで表すことができる以外、$m<ab$ については2通りに表すことができる数はない。そして、 $n+n'=2ab$ より、一方が ab より小さく、他方は ab より大きい。また、ab より大きい数についても、それに対応する ab 未満の数が1通りしか表すことができないことから、1通りにしか表すことができない。

以上のことから、$0 \leqq x \leqq b,\, 0 \leqq y \leqq a$ を $ax+by$ に代入して得られる $(a+1)(b+1)$ 個の数のうち、 ab より小さいものは、全体から ab を表す2通りを除いたものの半分である。

従って、表すことができない自然数の個数は、$0, 1, \quad \cdots \quad, ab-1$ の ab 個から上で考えた個数を引くので、 $ab - \dfrac{1}{2}\{(a+1)(b+1)-2\} = \dfrac{1}{2}(ab-a-b+1) = \dfrac{1}{2}(a-1)(b-1)$

以上をまとめて、次の定理となる。

定理 3.1 $\quad ax+by \quad (a, \geqq 0)$ で表すことができない自然数の個数は $\dfrac{1}{2}(a-1)(b-1)$

この「$ax+by \quad (x,\ y\ \geqq\ 0)$ で表すことができない自然数の個数」については、曲線 $y^b = x^a$ の原点に対するブローイングアップとユークリッドの互除法の関連から「曲線の特異点の悪質度」に結びつくことが知られている。そのことについては、平成 23 年 12 月のキトキト数学研修に資料として提出した「油分け算と一次不等式」というプリントの最後に掲載している。（このプリントは、http://ja9nfo.web.fc2.com/math/math.htm の中に掲載している。そういえば、このプリントを作成したのは、N先生が当時富山中部高校で生徒に油分け算について考えさせていたことがきっかけだった。）

$ax+by=m$ について、面白い性質があることを知ることができた。生徒の T 君が質問に来てくれ、さらに関連問題についてN先生に情報をもらったおかげであり、感謝したい。当初、結構面倒な考察をしなければならないかと思っていたけど、あれこれ試しているうちに、簡単な式変形だけで導けることがわかった。

N 先生には、送ったレポートに対してコメント等を寄せてもらい、当初のレポートを内容を整理・拡張した。考察を前進させてもらったことに重ねて感謝したい。