一次不定方程式の整数解の或る計算方法

2020 年 6 月 1 日
石動高校　片山　喜美

先頃、何人かの先生に「一次不定方程式の合同式による解法」というレポートで、整数解が割と簡便な計算で算出できることを知らせたところ、和泉寛成先生から式変形による解法について返信があった。その計算は互除法に沿ったもので、眺めているうち、簡便に書き表すことができることに気づいた。この方法は、多項式 $a(x)$ と $b(x)$ の互除法による最大公約数 $d(x)$ の計算、さらに $a(x)f(x)+b(x)g(x)=d(x)$ を満たす多項式 $f(x), g(x)$ を求めることにも使える。以下に紹介する。

◇ 2 つの整数 a, b の最大公約数 d の計算と一次不定方程式 $ax+by=d$ の整数解の求め方について

1. $97x+17y=1$ の整数解について

まずは、説明抜きで計算を書く。説明はその後に記載する。

$$
\begin{array}{cccc}
 & 97 & 17 & \\
 & 85 & & (\ \ 5 \\
\hline
 & 12 & 17 & \\
1\ \ ) & & 12 & \\
\hline
 & 12 & 5 & \\
 & 10 & & (\ \ 2 \\
\hline
 & 2 & 5 & \\
2\ \ ) & & 4 & \\
\hline
 & & 1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
x & y \\
 & 5x \\
\hline
x & 5x+y \\
5x+y & \\
\hline
6x+y & 5x+y \\
 & 12x+2y \\
\hline
6x+y & 17x+3y
\end{array}
$$

上の計算で、左側の互除法では、最後のところ、2　5 から $2\times(-2)+5\times 1=1$ として、最下段の 1 を得ているので、右側の数式のところで、

$6x+y=-2,\quad 17x+3y=1$ と対応させる。

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 18x+3y & = & -6 \\
-\ \ ) & 17x+3y & = & 1 \\
\hline
 & x & = & -7
\end{array}
$$

$y=-2-6x=40$

特殊解：$x=-7,\ y=40$ 、　一般解：$x=-7+17k,\ y=40+97k$　(k は整数)

※　上記の計算で、右側の数式の書き方は以下のとおり

(1) 一番上は、$97x+17y$ だから $x \quad y$。(係数 97 17 が左側にある。)

(2) 2 段目は、 x に互除法の商の 5 をかけて y の下に置く。

(3) 3 段目は、 1 段目と 2 段目を足す。

(4) 4 段目は、 3 段目右の $5x+y$ に互除法の商の 1 をかけて、左に置く。

(5) 5 段目は、3 段目と 4 段目を足す。

(6) 6 段目、7 段目は 2 段目、3 段目と同様である。

※和泉寛成先生からお知らせいただいた計算は以下のようなものでした。

- $97x+17y=1$
- $(5\times17+12)x+17y=12x+17(5x+y)=1$
- $12x+(1\times12+5)(5x+y)=12\{x+(5x+y)\}+5(5x+y)=12(6x+y)+5(5x+y)=1$
- $5(5x+y)=12(6x+y)+5(5x+y)=(2\times5+2)(6x+y)+5(5x+y)$
  $=2(6x+y)+5\{(5x+y)+2(6x+y)\}=2(6x+y)+5(17x+3y)=1$

これらが、ちょうど互除法の右側の 1 段目から 3 段目、 3 段目から 5 段目への計算と同じになっていることがわかると思う。

2. $45x+32y=4$ の整数解について

					x	y
	45	32				
	32		(1			x
	13	32			x	$x+y$
2)		26			$2x+2y$	
	13	6			$3x+2y$	$x+y$
	12		(2			
	1					

$13\times1+6\times(-2)=1$ であるから、 $13\times4+6\times(-8)=4$

従って、$3x+2y=4,\quad x+y=-8$ と対応させる。

$$\begin{array}{rrcr} & 3x+2y & = & 4 \\ -\ ) & 2x+2y & = & -16 \\ \hline & x & = & 20 \end{array}$$

$y=-8-x=-28$

特殊解：$x=20,\ y=-28$ 、 一般解：$x=20+32k,\ y=-28-45k$ (k は整数)

【参考】互除法とそれを遡る計算で整数解を求める方法

$$
\begin{array}{cr|rr|c}
 & 45 & 32 & & \\
 & 32 & & (\ 1 & \\ \hline
 & 13 & 32 & & \\
2\ ) & & 26 & & \\ \hline
 & 13 & 6 & & \\
 & 12 & & (2 & \\ \hline
 & 1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
5 & -7 \\ \hline
 & 5 \\
5 & -2 \\ \hline
-4 & \\
1 & -2
\end{array}
$$

上記左の互除法の計算から、45 と 32 の最大公約数は 1 である。右に移り、下から上へ計算を登っていき、45 と 32 の右に並ぶ 5 と -7 により、 $45 \times 5 + 32 \times (-7) = 1$ という整数解を得る。(右側の計算の方法は簡単なのだが、ここでは説明省略)

4 倍して、$45 \times 20 + 32 \times (-28) = 1$

一般解は $x = 20 + 32K,\ y = -28 - 45k$ （k は整数） となる。

3. $192x + 73y = 1$ の整数解について

$$
\begin{array}{crrr}
 & 192 & 73 & \\
 & 146 & & (\ 2 \\ \hline
 & 46 & 73 & \\
1\ ) & & 46 & \\ \hline
 & 46 & 27 & \\
 & 27 & & (\ 1 \\ \hline
 & 19 & 27 & \\
1\ ) & & 19 & \\ \hline
 & 19 & 8 & \\
 & 16 & & (\ 2 \\ \hline
 & 3 & 8 & \\
2\ ) & & 6 & \\ \hline
 & 3 & 2 & \\
 & 2 & & (\ 1 \\ \hline
 & 1 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
x & y \\
 & 2x \\ \hline
x & 2x+y \\
2x+y & \\ \hline
3x+y & 2x+y \\
 & 3x+y \\ \hline
3x+y & 5x+2y \\
5x+2y & \\ \hline
8x+3y & 5x+2y \\
 & 16x+6y \\ \hline
8x+3y & 21x+8y \\
42x+16y & \\ \hline
50x+19y & 21x+8y
\end{array}
$$

$3 \times 1 + 2 \times (-1) = 1$ であるから、 $50x + 19y = 1, \quad 21x + 8y = -1$ と対応させる。

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 400x + 8 \cdot 19y & = & 8 \\
-\ ) & 399x + 19 \cdot 8y & = & -19 \\ \hline
 & x & = & 27
\end{array}
$$

$50 \cdot 27 + 19y = 1 \qquad 19y = -1349 \qquad y = -71$

特殊解：$x = 27,\ y = -71$ 、 一般解：$x = 27 + 73k,\ y = -71 - 192k$ （k は整数）

実際の入試には、ここまで互除法のステップが多いものは出てこないだろうと思う。でないと、教科書の方法でやると相当な手間が掛かる問題になってしまう。

◇ **2** つの整式 $a(x)$, $b(x)$ の最大公約数 $d(x)$ の計算と $a(x)f(x)+b(x)g(x)=d(x)$ を満たす整式 $f(x)$, $g(x)$ の求め方について

1. $a(x)=x^2-x+2,\ b(x)=x^2-2x+3$ について

	x^2-x+2	x^2-2x+3	
	x^2-2x+3		$($ 1
	$x-1$	x^2-2x+3	
x $)$		x^2-x	
	$x-1$	$-x+3$	
	$x-3$		$($ -1
	2		

$f(x)$	$g(x)$
	$f(x)$
$f(x)$	$f(x)+g(x)$
$xf(x)+xg(x)$	
$(x+1)f(x)+xg(x)$	$f(x)+g(x)$

$(x-1)\times 1+(-x+3)\times 1=2$ であるから、

$(x+1)f(x)+xg(x)=1 \quad \cdots①,\quad f(x)+g(x)=1 \quad \cdots②$ と対応させせる。

① $-\,x\times$ ② より

$$\begin{array}{lccccc} & (x+1)f(x) & + & xg(x) & = & 1 \\ -\ ) & xf(x) & + & xg(x) & = & x \\ \hline & f(x) & & & = & -x+1 \end{array}$$

$g(x)=1-f(x)=x \qquad \therefore \quad (x^2-x+2)(-x+1)+(x^2-2x+3)x=2$ 注意．整式の場合、係数を有理数まで広げて、最大公約数は有理数倍を許容して考える。このため、$(x^2-x+2)\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)+(x^2-2x+3)\cdot\dfrac{1}{2}x=1$

として、 $a(x)=x^2-x+2,\ b(x)=x^2-2x+3$ の最大公約数は 1 であるという。

このとき、$a(x)=x^2-x+2,\ b(x)=x^2-2x+3$ は、互いに素であるという。

答　$d(x)=1,\quad (x^2-x+2)\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)+(x^2-2x+3)\cdot\dfrac{1}{2}x=1$

【参考】互除法とそれを遡る計算で求める方法

	x^2-x+2	x^2-2x+3	
	x^2-2x+3		$($ 1
	$x-1$	x^2-2x+3	
x $)$		x^2-x	
	$x-1$	$-x+3$	
	$x-3$		$($ -1
	2		

$1-x$	x
	$1-x$
$1-x$	1
x	
1	1

右側は下から上へ引き算で戻る。一番上にたどり着いて、$f(x)=-x+1,\ g(x)=x$ で、 $a(x)f(x)+b(x)g(x)=2$ となる。整式の場合も、この方法が簡単で速いと思う。

2. $a(x) = x^3 - 2,\ b(x) = x^2 - x + 2$ について

$$
\begin{array}{llll}
 & x^3 \qquad -2 & x^2 - x + 2 & \\
 & x^3 - x^2 + 2x & & (\ \ x \\
\hline
 & x^2 - 2x - 2 & x^2 - x + 2 & \\
1\ \ ) & & x^2 - x + 2 & \\
\hline
 & x^2 - 2x - 2 & x + 4 & \\
 & x^2 + 4x & & (\ \ x \\
\hline
 & -6x - 2 & x + 4 & \\
 & -6x - 24 & & (\ \ -6 \\
\hline
 & 22 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
f(x) & g(x) \\
 & xf(x) \\
\hline
f(x) & xf(x) + g(x) \\
xf(x) + g(x) & \\
\hline
(x+1)f(x) + g(x) & xf(x) + g(x) \\
 & (x^2 + x)f(x) + xg(x) \\
\hline
(x+1)f(x) + g(x) & (x^2 + 2x)f(x) + (x+1)g(x)
\end{array}
$$

$(-6x - 2) \times 1 + (x + 4) \times 6 = 22$ であるから、

$(x+1)f(x) + g(x) = 1 \quad \cdots ①,\quad (x^2 + 2x)f(x) + (x+1)g(x) = 6 \quad \cdots ②$ と対応させる。

$(x + 1) \times ① - ②$ より

$$
\begin{array}{rrcrcr}
 & (x^2 + 2x + 1)f(x) & + & (x+1)g(x) & = & x + 1 \\
-\ \ ) & (x^2 + 2x)f(x) & + & (x+1)g(x) & = & 6 \\
\hline
 & f(x) & & & = & x - 5
\end{array}
$$

$g(x) = 1 - (x + 1)f(x) = 1 - (x + 1)(x - 5) = -x^2 + 4x + 6$

答 $d(x) = 1,\quad (x^3 - 2) \cdot \dfrac{1}{22}(x - 5) + (x^2 - x + 2) \cdot \dfrac{1}{22}(-x^2 + 4x + 6) = 1$

3. $a(x) = x^3 + 2x^2 - 1,\ b(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ について

$$
\begin{array}{llll}
 & x^3 + 2x^2 \qquad -1 & x^3 + 3x^2 + 4x + 2 & \\
1) & x^3 + 2x^2 \qquad -1 & & \\
\hline
 & x^3 + 2x^2 \qquad -1 & x^2 + 4x + 3 & \\
 & x^3 + 4x^2 + 3x & & (x \\
\hline
 & -2x^2 - 3x - 1 & x^2 + 4x + 3 & \\
 & -2x^2 - 8x - 6 & & (-2 \\
\hline
 & 5x + 5 & x^2 + 4x + 3 & \\
\frac{1}{5}x) & & x^2 + x & \\
\hline
 & 5x + 5 & 3x + 3 & \\
 & 5x + 5 & & (-\frac{5}{3} \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
f(x) & g(x) \\
g(x) & \\
\hline
f(x) + g(x) & g(x) \\
 & xf(x) + xg(x) \\
\hline
f(x) + g(x) & xf(x) + (x+1)g(x) \\
 & -2f(x) - 2g(x) \\
\hline
f(x) + g(x) & (x-2)f(x) + (x-1)g(x)
\end{array}
$$

このとき、係数は許容して、最大公約数を $d(x) = x + 1$ とするが、とりあえずは、上記計算で $3x + 3$ を表すところに結びつける。

$(5x + 5) \cdot \left(-\dfrac{1}{5}x\right) + (x^2 + 4x + 3) \times 1 = 3x + 3$ であるから、

$f(x) + g(x) = -\dfrac{1}{5}x \quad \cdots ①,\quad (x - 2)f(x) + (x - 1)g(x) = 1 \quad \cdots ②$ と対応させる。

$(x - 1) \times ① - ②$ より

$$
\begin{array}{rrcrcr}
 & (x-1)f(x) & + & (x-1)g(x) & = & -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x \\
-\ \ ) & (x-2)f(x) & + & (x-1)g(x) & = & 1 \\
\hline
 & f(x) & & & = & -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - 1
\end{array}
$$

$$g(x) = -\frac{1}{5}x - f(x) = -\frac{1}{5}x - \left(-\frac{1}{x}^{2} + \frac{1}{5}x - 1\right) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x + 1$$

$3x+3$ を 3 で割って $x+1$ とすることを含めて以下のようになる。

$$d(x) = 1,$$

$$(x^3 + 2x^2 - 1)\cdot\frac{1}{15}(-x^2 - x - 15) + (x^3 + 3x^2 + 4x + 2)\cdot\frac{1}{15}(x^2 - 2x + 15) = x + 1$$

確かめ

はじめの 3 段は $(x^3+2x^2-1)(-x^2-x-15)$、その後の 3 段は $(x^3+3x^2+4x+2)(x^2-2x+15)$

$$\begin{array}{cccccc}
-1 & -2 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 0 & -1 & \\
 & & -5 & -10 & 0 & 5 \\
1 & 3 & 4 & 2 & & \\
 & -2 & -6 & -8 & -4 & \\
 & & 5 & 15 & 20 & 10 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 15
\end{array}$$

$$(x^3 + 2x^2 - 1)(-x^2 - x - 15) + (x^3 + 3x^2 + 4x + 2)(x^2 - 2x + 15) = 15x + 15$$

このように、2 つの整式の最大公約数 $d(x)$ を $a(x)f(x) + b(x)g(x) = d(x)$ と表す $f(x)$, $g(x)$ を 1 組求めることができる。整数のときと同じように、一般解は $f(x)+b(x)Q(x)$, $g(x)-a(x)Q(x)\quad(Q(x)\in\mathbb{Q}[x])$ とできる。

このようなことは、大学入試では出題されることはきっとないのであろう。また、数学の専門分野でも具体的に計算して役立てることがあるのかどうかについてはよく知らない。（グレブナ-基底などのところでは、使うのかもしれないが、知識が無い。）