コラッツ列のいくつかの性質について

2019年6月〜10月
※11月8日修正版
石動高校　片山　喜美

今年度のはじめ、コラッツ列について、豊本克巳先生から情報をいただいたので少し考えてみた。その結果を6月に手書きでまとめてみた。それをTeXに打ち込んでいる途中、さらに気づいたことなどがあったので書き加えていった。

コラッツの問題は、初等的なことなら表計算ソフトなどを用いて数値を出してみることができるため、素人にも楽しめる。そんなことに時間を費やしてTeXに打ち込むのが後回しにり、そのうちに時間が経ってしまった。

だんだん長くなってきたので、双子コラッツ数等については、別のレポートに書く予定とし、9月中旬に一端区切りをつけることにした。とりあえず打ち終わって周囲の人に送ったのが10月上旬だった。

そのレポートを豊本克巳先生が読んでくださり、表現についての助言やかなりたくさんのタイプミス等を指摘していただいたので10月末に修正した。

さらに、11月になって奇数相関図にもミスがあることを知らせていただいたので、修正した。

1　コラッツ列の定義とコラッツの予想

コラッツ列の定義

2以上の自然数 N を初項とするコラッツ列を以下で定義する。

- $a_0 = N$
- $a_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}a_i & (a_i\text{が偶数の時}) \\ 3a_i + 1 & (a_i\text{が}3\text{以上の奇数の時}) \\ a_i\text{で終わりにする} & (a_i = 1\text{の時}) \end{cases}$

例

- $N = 2$　　$a_0 = 2,\ a_1 = 1$
- $N = 3$　　$a_0 = 3,\ a_1 = 10,\ a_2 = 5,\ a_3 = 16,\ a_4 = 8,\ a_5 = 4, a_6 = 2,\ a_7 = 1$
- $N = 4$　　$a_0 = 4,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1$
- $N = 5$　　$a_0 = 5,\ a_1 = 16,\ a_2 = 8,\ a_3 = 4,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1$

記号

書く手間を省くため、 $C(N) = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n = 1$ のような書き方をする。

- $C(2) = 2,\ 1$
- $C(3) = 3,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$
- $C(4) = 4,\ 2,\ 1$
- $C(5) = 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$
- $C(6) = 6,\ 3,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$
  初項 6 の次に来るのが $a_1 = 3$ であるから、その後は 3 を初項とするコラッツ列 $C(3)$ と同じになる。このとき、$C(6) = 6,\ C(3)$ と書くことにする。

  $C(6)$ は $C(3)$ を左に 1 つ伸ばしたものになっている。
- $C(7) = 7,\ 22,\ 11,\ 34,\ 17,\ 52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$
  $\quad = 7,\ 22,\ 11,\ 34,\ 17,\ 52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ C(5)$
- $C(8) = 8,\ 4,\ 2,\ 1$

一番単純なのは、$N = 2^n$ の時である。次が成り立つ（自明）

命題 1-1
$C(2^n) = 2^n,\ 2^{n-1},\ \cdots\cdots, 2,\ 1$

◎コラッツの予想

任意の 2 以上の整数 N について、N を初項とするコラッツ列 $C(N)$ は有限の長さで 1 に達して終わる。

この予想は、一見、簡単に証明できるように思える。しかし、未解決なのである。（2019 年夏現在）

放浪の数学者ポール・エルディシュは「我々の数学は、この問題を解くことができるレベルに達していない。」と述べたそうである。20 世紀の最先端の数学を持ってしても解決できない問題なのだという。

しかし、数学の歴史には、思いもかけない解決をみたものもある。

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots \qquad \text{は有理数かどうか？}$$

については、オイラーの時代から長年未解決であった。ところが、1970 年台に、フランスの片田舎に住むアペリという人により、無理数であることが証明された。その証明は、20 世紀の最先端の数学などを用いたものではなく、オイラーが示していてもおかしくない方法であったことから、「The proof that Euler missed.（オイラーが見逃した証明）」と呼ば

れた。さらに、その後、アペリの証明よりもっと分かり易い証明をボイカースという数学者が示した。私は学生のころ、指導教官からの指示でボイカースの証明をセミナーで報告した思い出がある。ボイカースの証明については、「数学 III・C とその周辺についてのメモ」（１９９８年富山県高教研発表 pdf file） http://ja9nfo.web.fc2.com/math/su3memo.pdf の中に記載している。

コラッツの予想も、もしかしたら身近な数学の道具で証明できるかもしれないが、きっとそうではないのだろう。

いずれにせよ、コラッツの問題は具体的な数字を並べながら、私のような素人でも少し楽しむことができる。高校生などが取り組んでみたら、面白い性質を発見するかもしれない。

2　コラッツ列の長さといくつかの性質

2.1　コラッツ列の長さ

定義 2-1 $C(N) = a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n(=1)$ のとき、「コラッツ列 $C(N)$ の長さは n であると定義する。このとき、$col(N) = n$ と表すことにする。

注意　ここでは、初項を除いたものをコラッツ列の長さと定義した。

エクセルの VBA で簡単なプログラムを作って、コラッツ列の長さを調べてみると、以下のとおりとなる。

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
$col(N)$	1	7	2	5	8	16	3	19	6	14	9	9	17	17	4	12	20	20	7	$\cdots$

補題 2-1　$C(N) = a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n = 1$ のとき、$col(N) = m + col(a_m)$ $(0 \leqq m \leqq n-1)$

証明）a_1 から a_m までに m 個、a_{m+1} から a_n まで $n-m$ 個項が並ぶことより補題が成り立つ。//

コラッツ列の長さを眺めてみると、単純な変化をしない。例えば、$N = 3$ のとき、長さが 7 と大きくなってしまうが、次の $N = 4$ では長さが 2 となる。$N = 27$ のときには、長さが 111 と相当長くなってしまうが、その前後では長さが短い。コラッツ列を作る規則では、偶数の間は大きさが半分になるが、奇数が現れたところで次の項が 3 倍＋ 1 となり、大きくなってしまう。

2.2　コラッツ列の長さが短い数について

次の定理は自明である。

定理 2-1

- コラッツ列が単調減少である　$\Longleftrightarrow$　$N = 2^k$

- $col(2^k) = k$

$N = 2^k$ のとき、コラッツ列の長さは、その前後の数のコラッツ列の長さより短くなり、極小の状況になる。2 のベキではない数の時は、コラッツ列を作っていくと、必ずどこかで奇数が現れ、その次の項に移るときに一度大きくなってしまう。そのため、コラッツ列が長くなる。

コラッツ列の長さに関して、まず、次の補題を示す。

補題 2-2　コラッツ列 $C(N) = a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n = 1$ において、

$$a_m > 2^t \quad \Longrightarrow \quad a_{m+1} > 2^{t-1}$$

証明）

- a_m が偶数の時、 $a_{m+1} = \frac{1}{2}a_m > \frac{1}{2} \cdot 2^t = 2^{t-1}$ なので、成り立つ。
- a_m が奇数の時、 $a_{m+1} = 3a_m + 1 > 2 \cdot 2^{t-1} = 2^t > 2^{t-1}$ なので成り立つ。
(証明終）

長さの最小値ついて、次の定理が成り立つ。

定理 2-2　$2^{k-1} < N < 2^k \quad \Longrightarrow \quad col(N) \geqq k + 2$

証明）　$2^{k-1} < N < 2^k$ のとき、N は 2 のベキではないので
$N = 2^{m-1}(2l + 1) \quad (m, l \in \mathbb{N})$　とできる。
このとき、$a_1 = 2^{m-2}(2l + 1), \quad a_2 = 2^{m-3}(2l + 1), \cdots\cdots, a_{m-1} = 2l + 1$
$2^{k-1} < a_0 = N$ であり、補題 2-2 より $a_1 > 2^{k-2}$ 。
さらに繰り返して、$a_2 > 2^{k-3}, \cdots\cdots, a_{m-1} > 2^{k-m}$
$a_{m-1} = 2l + 1$ は奇数であるから、 $a_m = 3a_{m-1} + 1 > 3 \cdot 2^{k-m} + 1 > 2 \cdot 2^{k-m} = 2^{k-m+1}$
したがって、$a_{m+1} > 2^{k-m}, \quad a_{m+2} > 2^{k-m-1}, \cdots\cdots, a_{k+1} > 2^0$。
$a_{k+1} > 1$ であるということは、コラッツ列がここで終わっていないことを示しているので、$col(N) \geqq k + 2$。　　　(証明終)

上の定理において不等式の等号 $col(N) = k + 2$ が成立するための条件について考えてみる。

- $k = 2$ のとき

N	2	3	2^2
$col(N)$	1	7	2

等号が成立する n は存在しない。

- $k = 3$ のとき

N	2^2	5	6	7	2^3
$col(N)$	2	5	8	16	3

$N=5$ のとき、$col(N)=k+2$ が成り立つ。5のコラッツ列は、$5,16,8,4,2,1$ となり、a_1 が2のベキになるので、その後は最短で1に向かう。そのため、短く終わるのである。

コラッツ列で、奇数 $2l+1$ の次の項が2のベキになる条件を考える。
$3(2l+1)+1=2^t \quad (t\in\mathbb{N})$ とおくと、$2l+1=\dfrac{2^t-1}{3}$

補題 2-3 $2l+1=\dfrac{2^t-1}{3}$ と表すことができるための必要十分条件は、t が偶数であることある。

$\because)$ $t=2s$ のとき、$2^t-1=4^s-1=(4-1)(4^{s-1}+4^{s-2}+\cdots\cdots+4+1)$ より、
$\dfrac{2^t-1}{3}=(4^{s-1}+4^{s-2}+\cdots\cdots+4+1)\equiv 1 \pmod 2$。　従って、$2l+1$ と奇数で表すことができる。
$t=2s-1$ のとき、$2^t-1=2\cdot 4^{s-1}-1=2\cdot(3L+1)-1=6L+1\equiv 1 \pmod 3$。従って、$\dfrac{2^t-1}{3}$ は整数にならない。　　(証明終)

補題により、$2l+1=\dfrac{4^s-1}{3} \quad (s\in\mathbb{N})$ となる。

定義 2-3 $N_s=\dfrac{4^s-1}{3}$ とする。

2.3 コラッツ列に基づく自然数のレベル

コラッツ列に現れる奇数で、その項の次の項が2のベキになるための必要十分条件は、その奇数が N_s で表されることである。この奇数に何かいい名前があればいいのであるが…。
そこで、奇数に関してコラッツ列における「レベル」を以下のように考える。

- 有限なコラッツ列において、1は末項である。1のレベルは0と定義する。
- 5は、そのコラッツ列が $5,16,8,4,2,1$ 　となることから、奇数としては、末項1の一つ手前である。このとき、奇数5のレベルは1であると定義する。
- 3については、コラッツ列が $C(3)=3,10,5,16,8,4,2,1$ となるので、奇数が3,5,1の順で現れる。このとき、奇数3のレベルは2であると定義する。

定義 2-4 N を初項とするコラッツ列 $C(N)$ 　の中に 末項の1以外に k 個の奇数が含まれるとき、N のレベルは k であると定義する。また、このとき、$Lev(N)=k$ と表すことにする。

注意　この定義では、N は偶数でもかまわないものとする。例えば、2^k を初項とするコラッツ列には、末項の1以外に奇数が含まれないので $Lev(2^k)=0$ となる。
また、$C(6)=6,3,10,5,16,8,4,2,1$ であるから、$Lev(6)=2$ なる。

少し計算して、以下のようになる。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$Lev(N)$	0	0	2	0	1	2	5	0	6	1	$\cdots$

命題 2-1 $Lev(2^m N) = Lev(N)$

証明）$2^m N$ を初項とするコラッツ列は、奇数を含まないまま N にたどり着くので命題が成り立つ。

定理 2-4 次が成り立つ.

(1) $Lev(N) = 0 \iff N = 2^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

(2) $Lev(N) = 1 \iff N = 2^m \cdot N_s = 2^m \cdot \dfrac{4^s - 1}{3} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, \quad s = 1, 2, 3 \cdots)$

2.4 レベル 1 の奇数

$Lev(N) = 1$ を満たす奇数は $N = N_s$ のみである。調べてみると

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
N_s	1	5	21	85	341	1365	5461	21845	87381	349255	$\cdots$

表からわかるように、このような奇数は少ししか無い。

$2^{k-1} < N < 2^k$ のとき、 $col(N)$ が最小値 $k+2$ となる数、すなわちレベル 1 の数について、もう少し見てみる。

- $k = 4$ のとき

N	2^3	9	10	11	12	13	14	15	2^4
$col(N)$	3	19	6	14	9	9	17	17	4

  等号が成立するのは、$N = 10 = 2 \cdot 5 = 2 \cdot N_2$ である。
  $2^2 \cdot 5 = 20$ については、 $2^4 < 20 < 2^5 \quad col(20) = 7$ で、等号成立条件 $col(N) = k+2$ を満たしている。

定理 2-5 （2 のベキ以外でコラッツ列が短くなる数)

$s \geqq 2$ のとき、$N = 2^m N_s$ は、$2^{m+2s-2} < N < 2^{m+2s-1}$ を満たし、$col(N) = m + 2s + 1$ となる。これは、2^{m+2s-2} と 2^{m+2s-1} の間の数の中で最もコラッツ列の長さが短い。また、この区間でコラッツ列の長さが最も短いものは、この形の数である。

すなわち、

区間 $2^{k-1} < N < 2^k \quad (k \geqq 2)$ の数でコラッツ列の長さ $col(N)$ が最小値 $k+2$ となるものは、レベルが **1** の数 $2^m \cdot N_s \quad (m \geqq 0,\ s \geqq 2,\ m + 2s - 1 = k)$ で表される

証明）

- $2^{m+2s-2} < N < 2^{m+2s-1}$ について
  $N_s - 2^{2s-2} = \dfrac{4^s-1}{3} - 2^{2s-2} = \dfrac{1}{3}\left\{(4^s-1) - 3\cdot 4^{s-1}\right\} = \dfrac{1}{3}\left(4^{s-1}-1\right) > 0$
  $2^{2s-1} - N_s = \dfrac{1}{2}\cdot 4^s - \dfrac{1}{3}(4^s-1) = \dfrac{1}{6}(4^s+2) > 0$
  従って、$2^{2s-2} < N_s < 2^{2s-1}$ となり、 $2^{m+2s-2} < 2^m N_s < 2^{m+2s-1}$ //

- $col(2^m N_s) = m+2s+1$ について
  $a_0 = 2^m N_s$ のとき、$a_1 = 2^{m-1}N_s,\ a_2 = 2^{m-2}N_s, \cdots\cdots, a_m = N_s, a_{m+1} = 4^s = 2^{2s}$
  従って、$col(2^m N_s) = m+2s+1$//

- コラッツ列の長さの最小性について
  定理 2-2 より $2^{m+2s-2} < N < 2^{m+2s-1}$ のとき、$col(N) \geqq m+2s+1$ が成り立つ。
  従って、$2^m N_s$ の長さは最小条件を満たしている。
  逆に、コラッツ列の長さが最小条件を満たすときは、途中に奇数が 1 度しか現れることができないので、次の項は 2 のベキである。従ってその奇数は、N_s の形になる。すなわち、初項は $2^m N_s$ の形の数である。//

$2^4 < N < 2^5$ の範囲に対応するのは、$m+2s-1=5$ として、
$m+2s = 6\,(s \geqq 2)$, $\quad (m.s) = (2,2),(0,3)$。
従って、$2^2 \cdot N = 2^2 \cdot \dfrac{4^2-1}{3} = 4\cdot 5 = 20$ と $n_3 = \dfrac{4^3-1}{3} = 21$ である。

- $k=5$ のとき

N	2^4	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	2^5
$col(N)$	4	12	20	20	7	7	15	15	10	23	10	111	18	18	18	106	5

  確かに、$col(N) = k+2 = 7$ が成立するのは、20 と 21 である。
  そのほかの数の列の長さは 10 以上であり、最も長いものでは $col(27) = 111$ になっている。これは、手で計算すると大変な手間になる。

- $k=6$ のとき
  $m+2s-1 = 6$ として、$m+2s = 7 \quad (s \geqq 2)$
  $(m,s) = (3,2),(1,3)$ から $N = 40, 42$

- $k=7$ のとき
  $m+2s = 8 \quad (s \geqq 2)$
  $(m,s) = (4,2),(2,3),(0,4)$ から $N = 80, 84, 85$

- $k=8$ のとき
  $m+2s = 9 \quad (s \geqq 2)$
  $(m,s) = (5,2),(3,3),(1,4)$ から $N = 160, 168, 170$

- $k=9$ のとき
  $m+2s = 10 \quad (s \geqq 2)$
  $(m,s) = (6,2),(4,3),(2,4),(0,5)$ から $N = 320, 336, 340, 341$

3　レベル2の奇数 ⋯ 奇数を3つだけ含むコラッツ列

3.1　コラッツ列の半順序

例えば、$C(3)=10,5,16,8,4,2,1$ は、奇数 $N_2=5$ から始まるコラッツ列を左に伸ばしたものになっている。コラッツ列を伸ばしている状況になっているかどうかで順序を定めることにする。

定義 3-1　$M,N\in\mathbb{N}$ について、M のコラッツ列 $C(M)$ が N のコラッツ列 $C(N)$ を左に伸ばしたものになっているとき、 $C(M)>C(N)$ と定義する。

例　奇数についてのみ考えてみる。

- $C(3)>C(5)$
- $C(7)=7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1$ より、
  $C(7)>C(11)>C(17)>C(13)>C(5)$

注意　$C(3)$ と $C(7)$ はともに $C(5)$ より大きい。しかし、　$C(3)$ と $C(7)$ の間には大小関係が無い。従って、「半順序」となる。

3.2　$C(N)>C(3)$ を満たす奇数 N　⋯ 3から左に伸ばしたコラッツ列

$C(3)=3,10,5,16,8,4,2,1$ を左に伸ばしたコラッツ列を考えてみる。

$2l+1$ の次の項 $3(2l+1)+1=6l+4$ が2のべきの因数を割っていって3に達するとすると、$6l+4=2^m\cdot 3$ となる。3による剰余を考えて $1\equiv 0\pmod 3$ となるが、これは不可能である。

従って、3より左には偶数 $2^m\cdot 3\quad(m\in\mathbb{N})$ しか並べることができない。すなわち、3から左に伸ばして奇数を含むコラッツ列は存在しない。

同様に、3の倍数である奇数を左に伸ばして奇数を含むコラッツ列が存在しないことが示せる。すなわち、次の命題が成り立つ。

命題 3-1　$N\equiv 0\pmod 3$ のとき、$C(M)>C(N)$ を満たす奇数 M は存在しない。

3.3　$C(N)>C(5),\quad Lev(N)=2$ を満たす奇数　⋯ 5から左に伸ばしたコラッツ列

コラッツ列で末項の1以外に奇数が現れるとすると、1の手前の奇数は、先に述べた $N_s=\dfrac{4^s-1}{3}\quad(s\geqq 2)$ である。N_s 以外の奇数は、いずれかの N_s に繋がるのである。奇数 $2l+1$ の次の項が レベル1の奇数 N_s に繋がるとすると、$3(2l+1)+1=2^m\cdot N_s$ となる。従って、レベル2の奇数は $2l+1=\dfrac{2^m\cdot N_s-1}{3}=\dfrac{2^m(4^s-1)-3}{9}$ の形である。

定義 3-2　$N(s,m) = \dfrac{2^m \cdot N_s - 1}{3} = \dfrac{2^m(4^s-1)-3}{9}$ とする。

全ての s, m について、$N(s,m)$ が整数で、しかも奇数になるわけではない。一定の条件に縛られるのだが、その様子を少し調べてみる。$2l+1 = N(s,m)$ となるとき、変形して、$6l+4 = 2^m \cdot N_s$ が成り立つ。3 を法とする合同式を考えて　$1 \equiv 2^m \cdot N_s \pmod 3$ が成り立つ。この式がポイントである。

奇数 $2l+1$ を初項とし、$N_2 = 5$ に繋がるコラッツ列を考えると、
$1 \equiv 2^m \cdot 5 \equiv 2^m \cdot 2 \equiv 2^{m+1} \pmod 3$ となる。従って、m は奇数。
$m = 2k+1$ とおいて、 $2l+1 = \dfrac{2^{2k+1} \cdot 5 - 1}{3}$

コラッツ列で **5** の次に左に来る奇数 (レベル **2** の奇数) は、$\dfrac{2^{2k+1} \cdot N_2 - 1}{3} = \dfrac{2^{2k+1} \cdot 5 - 1}{3}$ である。

$N(2, 2k+1) = \dfrac{2^{2k+1} \cdot N_2 - 1}{3} = \dfrac{2^{2k+1} \cdot 5 - 1}{3}$ として、得られる奇数を調べてみる。

k	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$N(2,2k+1)$	13	53	213	853	3413	13653	$\cdots$

注意　$C(13) > C(5)$,　$C(53) > C(5)$,　$C(213) > C(5), \cdots\cdots$ であるが、$C(13), C(53), C(213), \cdots$ の間には大小関係が無い。

3.4　$C(N) > C(85)$,　$Lev(N) = 2$ を満たす奇数　$\cdots$ 85 から左に伸ばしたコラッツ列

レベル 1 の奇数で 5 の次は $N_3 = \dfrac{4^3-1}{3} = 21$ である。$21 \equiv 0 \pmod 3$ であるから、命題 2-1 で述べたように $C(N) > C(21)$ を満たす奇数 N は存在しない。

すなわち、**21 から左に奇数を含むコラッツ列は存在しない。**

次に、奇数 $2l+1$ を初項とし、$N_4 = 85$ に繋がるコラッツ列を考えると、前と同様に $1 \equiv 2^m \cdot 1 \pmod 3$ となる。従って、m は偶数。$m = 2k$ とおいて、 $2l+1 = \dfrac{2^{2k} \cdot 85 - 1}{3}$

コラッツ列で **85** の次に左に来る奇数 (レベル **2** の奇数) は、$\dfrac{2^{2k} \cdot N_4 - 1}{3} = \dfrac{2^{2k} \cdot 85 - 1}{3}$ である。

$N(4, 2k) = \dfrac{2^{2k} \cdot N_4 - 1}{3} = \dfrac{2^{2k} \cdot 85 - 1}{3}$ として、得られる奇数を調べてみる。

k	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$N(4,2k)$	113	453	1813	7253	29013	116053	$\cdots$

3.5　一般のレベル 2 の奇数について

奇数 $2l+1$ を初項とし、$N_s = \dfrac{4^s-1}{3}$ に繋がるコラッツ列を考えると、前と同様に $6l+4 = 2^m \cdot \dfrac{4^s-1}{3}$ となる。3 による剰余を考えて $1 \equiv 2^m \cdot \dfrac{4^s-1}{3} \pmod 3$ となる。

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{4^s-1}{3} &= \frac{(4-1)(4^{s-1}+4^{s-2}+\cdots\cdots+4+1)}{3}\\ &= 4^{s-1}+4^{s-2}+\cdots\cdots+4+1\\ &\equiv 1+1+\cdots\cdots+1+1 = s \pmod 3\text{。}\end{aligned}$$

従って、$1 \equiv 2^m \cdot s \pmod 3$

- $s \equiv 0 \pmod 3$ の時
  $2^m \equiv 0 \pmod 3$ となるが、これは不可能である。

- $s \equiv 1 \pmod 3$ の時
  $2^m \equiv 1 \pmod 3$ であるから、m は偶数である。
  $m = 2k, s = 3t+1$ とおいて、レベル 2 の奇数は
  $$N(3t+1, 2k) = \frac{2^{2k}\cdot N_{3t+1}-1}{3} = \frac{2^{2k}\cdot\dfrac{4^{3t+1}-1}{3}-1}{3} = \frac{2^{2k+6t+2}-2^{2k}-3}{9}$$

- $s \equiv -1 \pmod 3$ の時
  $2^m \equiv 2 \pmod 3$ であるから、m は奇数である。
  $m = 2k-1, s = 3t-1$ とおいて、レベル 2 の奇数は
  $$N(3t-1, 2k-1) = \frac{2^{2k-1}\cdot N_{3t-1}-1}{3} = \frac{2^{2k-1}\cdot\dfrac{4^{3t-1}-1}{3}-1}{3} = \frac{2^{2k+6t-3}-2^{2k-1}-3}{9}$$

定理 3-1　コラッツ列でレベル 2 の奇数は、次の 2 つのうちどれかになる。

(1) $N(3t+1, 2k) = \dfrac{2^{2k+6t+2}-2^{2k}-3}{9}$　（ N_{3t+1} の左に来るもの）

このとき、コラッツ列は、

$$\frac{2^{2k+6t+2}-2^{2k}-3}{9},\ 2^{2k}\cdot N_{3t+1}, \cdots\cdots,\ 2\cdot N_{3t+1},\ N_{3t+1},\ 2^{6t+2}, \cdots\cdots, 2, 1$$

(2) $N(3t-1, 2k-1) = \dfrac{2^{2k+6t-3}-2^{2k-1}-3}{9}$　（ N_{3t-1} の左に来るもの）

このとき、コラッツ列は、

$$\frac{2^{2k+6t-3}-2^{2k-1}-3}{9},\ 2^{2k-1}\cdot N_{3t-1}, \cdots\cdots,\ 2\cdot N_{3t-1},\ N_{3t-1},\ 2^{6t-2}, \cdots\cdots, 2, 1$$

レベル2の奇数に関するコラッツ列の長さについては、次の定理が成り立つ。

定理 3-2　$col(N(s,m)) = 2s + m + 1$

なお、定理3-1の分類に対応させると, 以下のとおりとなる。

- $col(N(3t+1, 2k)) = 6t + 2k + 3$
- $col(N(3t-1, 2k-1)) = 6t + 2k - 2$

証明）$C(N(s,m))$ については、$a_1 = 2^m \cdot N_s$ より、$a_2 = 2^{m-1} \cdot N_s, \cdots\cdots, a_{m+1} = N_s$ であるから、
$col(N(s,m)) = m + col(N_s) = m + (2s+1) = 2s + m + 1//$

レベル2の奇数が3で割り切れたら、それより左にコラッツ列を伸ばしても奇数は現れない。3の倍数でなければ、次のレベルの奇数が現れる。
次が成り立つ。

定理 3-3

(1) レベル2の奇数で3で割り切れるのは、以下のものである
$N(9l-5, 6m-2), N(9l-2, 6m-4, N(9l+1, 6m)$
$N(9l-7, 6m-5), N(9l-4, 6m-3), N(9l-1, 6m-1) \qquad (l, m \in \mathbb{N})$

(2) レベル2の奇数で3で割った余りが1であるのは、以下のものである
$N(9l-5, 6m), N(9l-2, 6m-2), N(9l+1, 6m-4)$
$N(9l-7, 6m-3), N(9l-4, 6m-1), N(9l-1, 6m-5) \qquad (l, m \in \mathbb{N})$

(3) レベル2の奇数で3で割った余りが2であるのは、以下のものである
$N(9l-5, 6m-4), N(9l-2, 6m), N(9l+1, 6m-2)$
$N(9l-7, 6m-1), N(9l-4, 6m-5), N(9l-1, 6m-3) \qquad (l, m \in \mathbb{N})$

証明）表計算ソフトで $N(3t+1, 2k), N(3t-1, 2k-1)$　及び、それを3で割った余りの表を作成すると、縦横とも余りが順に現れる事がわかる。 従って縦横について、周期3になることを証明すれば、$t, k = 1, 2, 3$ での9個の値から全体の値がわかることになる。
$N(3t+1, 2k)$ 及び $N(3t-1, 2k-1)$ の $t, k = 1, 2, 3$ のときの値と3で割った余りはエクセルで作成した表（次のページに記載した）からわかる。

(1) $N(s+9, m) \equiv N(s,m) \pmod 3$ について

$$N(s+9, m) - N(s,m) = \frac{2^m \cdot N_{s+9} - 1}{3} - \frac{2^m \cdot N_s - 1}{3} = \frac{2^m \cdot (N_{s+9} - N_s)}{3}$$

$$N_{s+9} - N_s = \frac{4^{s+9} - 1}{3} - \frac{4^s - 1}{3} = \frac{4^s \cdot (4^9 - 1)}{3} = \frac{4^s \cdot 262143}{3} = 4^s \cdot 87381$$

従って、$N(s+9, m) - N(s,m) = 2^m \cdot 4^s \cdot 29127 \equiv 0 \pmod 3//$

(2) $N(s, m+6) \equiv N(s, m) \pmod 3$ について

$$N(s, m+6) - N(s, m) = \frac{2^{m+6} \cdot N_s - 1}{3} - \frac{2^m \cdot N_s - 1}{3} = \frac{2^m \cdot N_s \cdot (2^6 - 1)}{3}$$

$$= \frac{2^m \cdot N_s \cdot 63}{3} = 2^m \cdot N_s \cdot 21 \equiv 0 \pmod 3 \qquad //$$

以上により定理は示された。(証明終わり)

レベル２の奇数の表

(1) N(3t+1,2k)

			k= 1	2	3	4	5	6
t	3t+1	N_{3t+1}	2k= 2	4	6	8	10	12
1	4	85	113	453	1813	7253	29013	116053
2	7	5461	7281	29125	116501	466005	1864021	7456085
3	10	349525	466033	1864133	7456533	29826133	119304533	477218133
4	13	22369621	29826161	1.19E+08	4.77E+08	1.91E+09	7635497301	3.0542E+10
5	16	1431655765	1908874353	7.64E+09	3.05E+10	1.22E+11	4.8867E+11	1.9547E+12
6	19	91625968981	1.22168E+11	4.89E+11	1.95E+12	7.82E+12	3.1275E+13	1.251E+14

N(3t+1,2k) mod 3

			k= 1	2	3	4	5	6
t	3t+1	N_{3t+1}	2k= 2	4	6	8	10	12
1	4	85	2	0	1	2	0	1
2	7	5461	0	1	2	0	1	2
3	10	349525	1	2	0	1	2	0
4	13	22369621	2	0	1	2	0	1
5	16	1431655765	0	1	2	0	1	2
6	19	91625968981	1	2	0	#NUM!	#NUM!	#NUM!

(2) N(3t-1,2k-1)

			k= 1	2	3	4	5	6
t	3t-1	N_{3t-1}	2k-1= 1	3	5	7	9	11
1	2	5	3	13	53	213	853	3413
2	5	341	227	909	3637	14549	58197	232789
3	8	21845	14563	58253	233013	932053	3728213	14912853
4	11	1398101	932067	3728269	14913077	59652309	238609237	954436949
5	14	89478485	59652323	2.39E+08	9.54E+08	3.82E+09	1.5271E+10	6.1084E+10
6	17	5726623061	3817748707	1.53E+10	6.11E+10	2.44E+11	9.7734E+11	3.9094E+12

N(3t+1,2k) mod 3

			k= 1	2	3	4	5	6
t	3t-1	N_{3t-1}	2k-1= 1	3	5	7	9	11
1	2	5	0	1	2	0	1	2
2	5	341	2	0	1	2	0	1
3	8	21845	1	2	0	1	2	0
4	11	1398101	0	1	2	0	1	2
5	14	89478485	2	0	1	2	0	1
6	17	5726623061	1	2	0	1	2	#NUM!

注意　上の定理の (1)〜(3) で、上段の 3 つは $N(3t+1,2k)$ のもので
下段の 3 つが $N(3t-1,2k-1)$ のものである。

次のようにあらわすこともできる。

定理 3-3
$N(3t+1,2k) \equiv t+k \pmod 3$
$N(3t-1,2k-1) \equiv k-t \pmod 3$
証明）縦横とも周期 3 であることを示して、それぞれ、mod 3 の表で最初の 3× 3 の部分の余りをみればよい。//

4　双子コラッツ数

豊本克巳先生から、連続する 2 整数でコラッツ列の長さが等しくなるところがあることを教えていただいた。例えば、前の表により、$col(12) = col(13) = 9,\quad col(14) = col(15) = 17,\quad col(18) = col(19) = 20$ であることがわかる。

定義 4-1　$col(N) = col(N+1)$ となるとき、N と $N+1$ を**双子コラッツ数** という。

さらにもう少し先まで調べると、$col(28) = col(29) = col(30) = 18$ と、連続する 3 つの整数でコラッツ数が等しくなっている。このとき、$28, 29, 30$ を **3 つ子コラッツ数** という。

定義 4-2　$col(N) = col(N+1) = \cdots\cdots = col(N+k-1)$ となるとき、$N, N+1, \cdots\cdots, N+k-1$ を **k つ子コラッツ数** という。

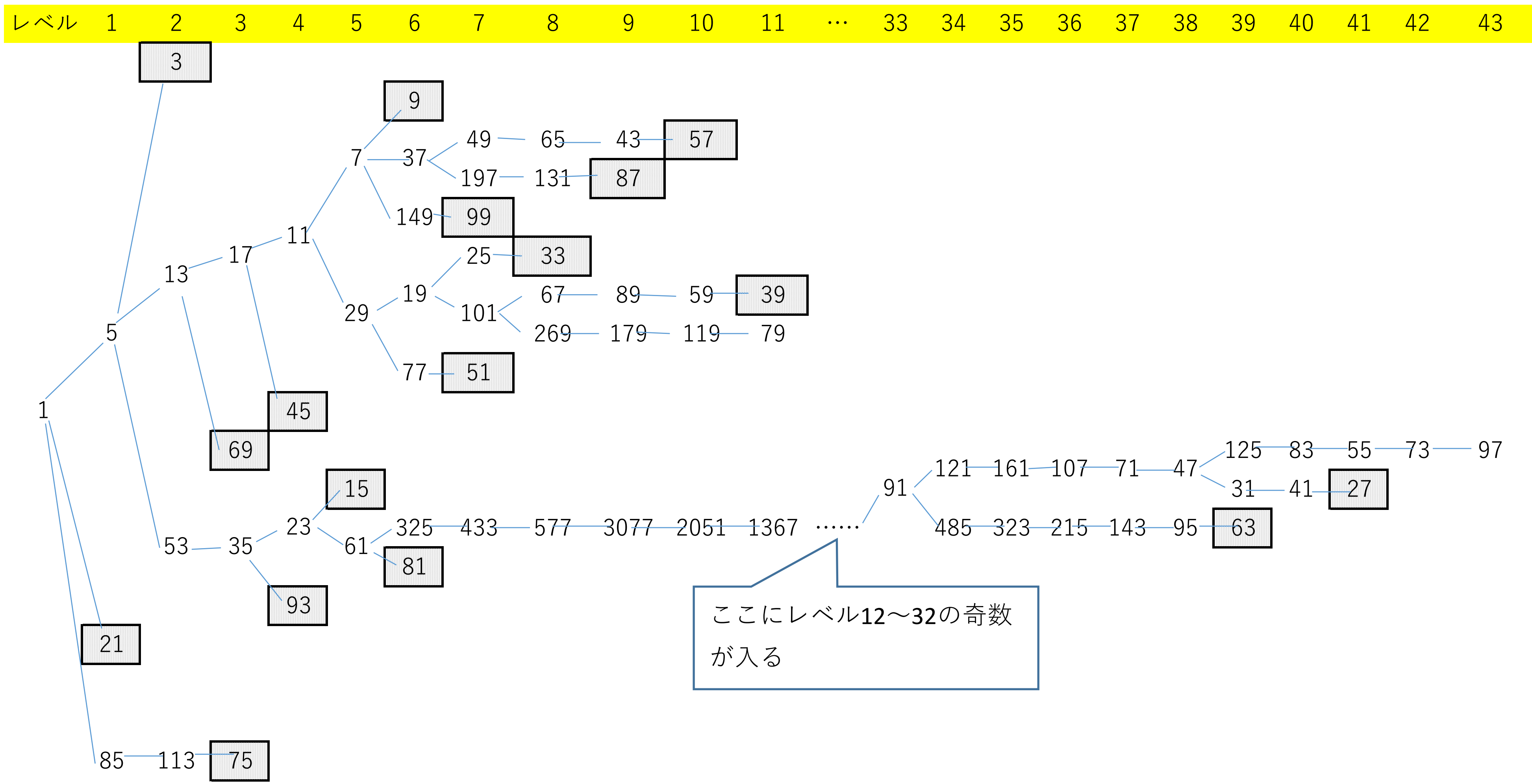
注意　3 つ子コラッツ数は、双子コラッツ数でもあるとみなす。一般に $k > l$ のとき、k つ子コラッツ数は、l つ子コラッツ数でもあると見なすことにする。

「k つ子コラッツ数」の k はどこまでも大きくなるのか、それとも限界があるのか？
きっと限界はないのだろうと思い、エクセルの VBA でプログラムを作って $N = 30,000,000$ まで探ってみたところ、

$N = 24,455,681$ **から 96 回、長さ 229 が続く**

という結果が得られた。
同じ長さのコラッツ列がそんなに簡単に現れる訳では無い。
なお、64bit の PC では、エクセルで LongLong 型の整数変数が使える。そのおかげで、かなり桁数の大きな整数を工夫無しで扱える。上記の計算には、普段使うノート PC で約 20 分を要した。
双子コラッツ数をはじめ、k つ子コラッツ数について、いくつかの面白そうな性質があるが、既にこのレポートは長くなってしまったので別のレポートに書くこととして、この辺で一段落としたい
最後に、参考のためコラッツ列に関する奇数の相関図を載せておく。

コラッツ列に現れる奇数の相関図



注意　　　網掛けのところは３の倍数で、それより上の段階に奇数は現れない。