正 17 角形の作図とガウス周期について

2019 年春
石動高校　片山　喜美

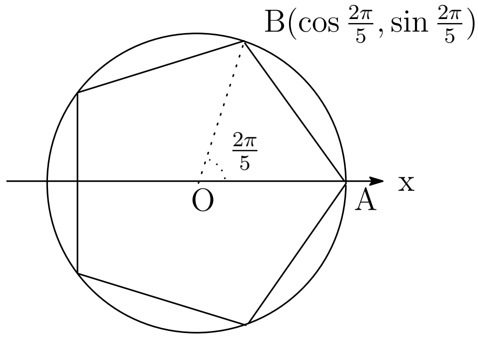
正 17 角形の作図可能性については、**ガウス周期**を用いて考える。ところが**ガウス周期**について解説している本はあまりない。僕の知っているのは、ポストニコフ著「ガロアの理論」(東京図書) くらいであった。
そんな中、2017 年に発刊された、栗原将人著「ガウスの数論世界をゆく」に、分かりやすい解説が載っていた。この本を読んで、自分なりに計算してみた。

1　正 5 角形の作図について

1.1　作図の可能性について

ここで言う「作図」とは、「定規とコンパスを用いた作図」のことをいうものとする。

右図のように、xy 平面で原点を中心とする半径 1 の円 (単位円) に内接する正 5 角形を考える。点 $A(1,0)$ を正 5 角形の 1 つの頂点に取ると、単位円上に反時計回りに回った次の頂点は、$B\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$ である。

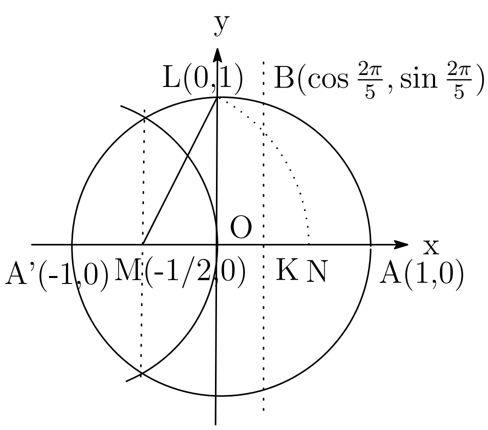


従って、「$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ **の値を計算することができ、しかも、それが定規とコンパスを用いて作り出すことができる値である**」ならば、正 5 角形を作図することができる。

計算は後回しにするが、$\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ である。$\sqrt{5}$ が作図できれば、この値は作図できそうである。$\sqrt{5}$ は、直角を挟む辺が 1 と 2 の直角三角形の斜辺として得ることができる。それをもとに、例えば正 5 角形は以下のような手順で作図することができる。

- 単位円の中心 $O(0,0)$ と単位円上の点 $A'(-1,0)$ の中点 $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を取る。
- 点 M と点 $L(0,1)$ を結ぶと、$ML = \sqrt{OM^2 + OL^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である。
- 点 M を中心とし、半径 ML の円を書き、x 軸の正の部分との交点を N とすると、$ON = MN - MO = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

- ON の中点を K とすると、$K\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}, 0\right) = \left(\cos\dfrac{2\pi}{5}, 0\right)$



- 点 K を通り、x 軸と垂直な直線と、単位円の $y > 0$ の部分との交点を B とすると、$B\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$ となる。

- 点 $A(1,0)$ と点 B の長さをコンパスでとり、それを 1 辺の長さにして順に円に上に頂点をとって、正 5 角形を作図することができる。

1.2 $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値の計算

高校数学の範囲で、幾通りかの方法がある。

(1) ２倍角、３倍角の公式を用いる方法

$\theta = \dfrac{2\pi}{5}$ とおく。$5\theta = 2\pi$ より、$3\theta = 2\pi - 2\theta$ 。 $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ 。

左辺 $= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 、　右辺 $= 2\cos^2\theta - 1$

$x = \cos\theta$ とおいて、$4x^3 - 3x = 2x^2 - 1, \qquad 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\begin{array}{rrrrr} 1) & 4 & -2 & -3 & 1 \\ & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 4 & 2 & -1 & (0 \end{array}$$

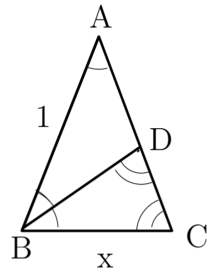
$(x-1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$

$x \neq 1$ より、$4x^2 + 2x - 1 = 0$ 　　２次方程式を解いて、 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$x = \cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$ より、$\underline{\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(2) 図形的な方法

図のような $AB = AC = 1, \angle BAC = 36^\circ$ の三角形 ABC を考える。



辺 AC 上に $\angle CBD = 36^\circ$ となるように点 D をとる。

$\triangle BCD$ において、$\angle CDB = 180^\circ - (\angle CBD + \angle BCD) = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$

$\therefore$ 　$\triangle BCD$ は $BC = BD$ の二等辺三角形である。

また、$\triangle DAB$ において、$\angle DAB = \angle DBA = 36^\circ$ であるから、$DA = DB$ の二等辺三角形になる。

$BC = BD = DA = x$ とおく。$\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ が相似であることから、

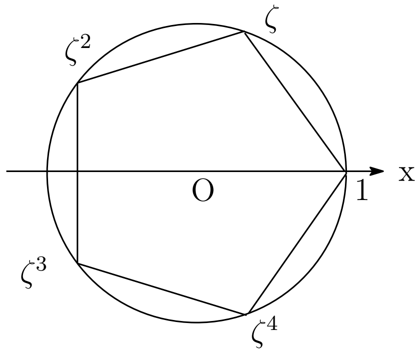
$AB : BC = BC : CD \qquad 1 : x = x : 1 - x \qquad 1 \cdot (1 - x) = x \cdot x$

よって、$x^2+x-1=0$ 。この2次方程式を解いて、$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ より $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad \cos 72^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{AC} = \underline{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(3) $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ を用いる方法

xy 平面を複素数平面として考えると、$1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ の5点は正五角形の頂点を表す。x 軸に対称な点をペアとして、$a=\zeta+\zeta^4,\quad b=\zeta^2+\zeta^3$ とおく。



- $a+b = (\zeta+\zeta^4)+(\zeta^2+\zeta^3)$
  $= (1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4)-1$
  $= \dfrac{1-\zeta^5}{1-\zeta} - 1 = \dfrac{1-1}{1-\zeta} - 1 = -1$
- $ab = (\zeta+\zeta^4)\cdot(\zeta^2+\zeta^3)$
  $= \zeta^3+\zeta^4+\zeta+\zeta^2 = a+b = -1$

従って、 a, b は2次方程式 $x^2+x-1=0$ の2つの解である。

この2次方程式を解いて、 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$$a=\zeta+\zeta^4 = \left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$$

よって、 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2}a = \underline{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(4) 相反方程式による方法

$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ は方程式 $x^5=1$ の解である。

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\zeta\neq 1$ であるから、 ζ は $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解である。

$x\neq 0$ であるから、両辺を x^2 で割って、 $x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$X=x+\dfrac{1}{x}$ とおき、$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=X^2-2$ より、

$X^2+X-1=0 \qquad$ これを解いて、 $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

あとは、(3) と同様にして $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ となる。

2　正 7 角形の作図について

正 5 角形で用いた 4 つの手法を正 7 角形に適用してみる。結論として、 $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ の値を平方根などだけでは得ることができない。そのため、正 7 角形を定規とコンパスで作図することができない。

(1) 加法定理による方法

$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ とおく。$7\theta=2\pi$ より、$4\theta=2\pi-3\theta$ 。 $\cos 4\theta=\cos 3\theta$ 。

左辺 $=2\cos^2 2\theta-1=2\left(2\cos^2\theta-1\right)^2-1$

$\quad=2\left(4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1\right)-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

右辺 $=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$x=\cos\theta$ とおいて、$8x^4-8x^2+1=4x^3-3x,\qquad 8x^4-4x^3-8x^2+3x+1=0$

$$\begin{array}{rrrrrr}
1) & 8 & -4 & -8 & 3 & 1 \\
 & & 8 & 4 & -4 & -1 \\ \hline
 & 8 & 4 & -4 & -1 & (0
\end{array}$$

$(x-1)(8x^3+4x\ 2-4x-1)=0$

$\cos\theta\neq 1$ より $\cos\theta$ は $8x^3+4x\ 2-4x-1=0$ 　の解である。

$2x=X$ とおいて、$X^3+X^2-2X-1=0$

$f(X)=X^3+X^2-2X-1$ とおいて、$f(1)\neq 0,\quad f(-1)\neq 0$ であるから、$f(X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ （整数係数の X の多項式全体）において既約である。（これ以上因数分解できない。）ということは、$\cos\dfrac{2\pi}{7}$ は 3 次方程式の解となるものの、 2 次方程式の解として得ることはできない。

（注意．体の拡大次数は $\left[\mathbb{Q}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}\right):\mathbb{Q}\right]=3$ である。）

(2) 図形による方法

うまい図形が思い浮かばない。（もし、うまい図形があったとして、それから得られるものは 3 次方程式のはずである）

(3) $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{7}}=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ を用いる方法

(i) 方法その 1

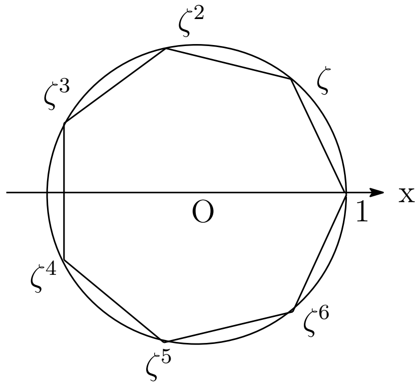
正 5 角形の場合と同様に、$1,\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^4,\zeta^5,\zeta^6$ の 7 点は正 7 角形の頂点を表す。x 軸に対称な点をペアとして、$a=\zeta+\zeta^6,\quad b=\zeta^2+\zeta^5,\quad c=\zeta^3+\zeta^4$ とおく。

- $a+b+c=(\zeta+\zeta^6)+(\zeta^2+\zeta^5)+(\zeta^3+\zeta^4)$
  $=(1+\zeta+\zeta^2+\cdots\cdots+\zeta^6)-1$
  $=\dfrac{1-\zeta^7}{1-\zeta}-1=\dfrac{1-1}{1-\zeta}-1=-1$
- $ab+bc+ca$
  $=(\zeta+\zeta^6)\cdot(\zeta^2+\zeta^5)+(\zeta^2+\zeta^5)\cdot(\zeta^3+\zeta^4)+(\zeta^3+\zeta^4)\cdot(\zeta+\zeta^6)$

$$= (\zeta^3+\zeta^6+\zeta^3+\zeta^4)+(\zeta^5+\zeta^6+\zeta+\zeta^2)+(\zeta^4+\zeta^2+\zeta^5+\zeta^3)$$
$$= 2(\zeta+\zeta^2+\cdots\cdots+\zeta^6) = 2(a+b+c) = -2$$

- $abc = ab\cdot c$
  $= (\zeta^3+\zeta^6+\zeta^3+\zeta^4)\cdot(\zeta^2+\zeta^5) = (\zeta^6+\zeta^2+\zeta^4+1)+(1+\zeta^3+\zeta^5+\zeta)$
  $= 2+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^6 = 2-1 = 1$

以上より、a,b,c は３次方程式 $X^3+X^2-2X-1=0$ の３つの解である。$a=\zeta+\zeta^6=2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ であり、（１）と同じ３次方程式となっている。



(ii) 方法その２

$\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^6$ の６つを (i) では３つに分けたのであるが、ここでは２つに分けることを考える。普通、ζ,ζ^2,ζ^3 と ζ^6,ζ^5,ζ^4 と分けるが、以下に述べるような別の分け方をする。

(a) 整数を素数７で割った余りのうち、０を除いたもの、すなわち 1,2,3,4,5,6 (mod 7) を考える。
天下り的であるが、$3^n \pmod 7$ を計算すると、

n	0	1	2	3	4	5
$3^n \pmod 7$	1	3	2	6	4	5

さらに $3^6\equiv 1 \pmod 7$ である。

これらにより、整数を素数７で割った余りのうち０でないものは、すべて３のべき乗を７で割った余りで表すことができることがわかる。そして、乗法について、３を生成元とする巡回群となっていることがわかる。この乗法群を $\mathbb{F}_7^{\times}$ と書く。

(b) 上に現れた $1,3,2,6,4,5$ の順に ζ の指数を与え、$\zeta,\zeta^3,\zeta^2,\zeta^6,\zeta^4,\zeta^5$ と並べる。

(c) １つおきにとって和を作る。すなわち、
$a=\zeta+\zeta^2+\zeta^4,\quad b=\zeta^3+\zeta^6+\zeta^5$ とする。

このとき、

- $a+b=\zeta+\zeta^2+\cdots\cdots+\zeta^6=-1$ （計算は前と同じ）
- $ab=(\zeta+\zeta^2+\zeta^4)(\zeta^3+\zeta^6+\zeta^5)$
  $=(\zeta^4+1+\zeta^6)+(\zeta^5+\zeta+1)+(1+\zeta^3+\zeta^2)=3+(\zeta+\zeta^2+\cdots\cdots+\zeta^6)$
  $=3-1=2$

従って、a,b は２次方程式 $x^2+x+2=0$ の２つの解である。
この２次方程式を解いて、$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 　(虚数解)

$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ とおく。
$a=\zeta+\zeta^2+\zeta^4=(\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta)+i(\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta)$

この虚数部において、$\sin 2\theta + \sin 4\theta = 2\sin 3\theta \cos\theta$ で

$\sin 3\theta = \sin\dfrac{6\pi}{7} > 0 \qquad \cos\theta = \cos\dfrac{2\pi}{7} > 0 \qquad \therefore \sin 2\theta + \sin 4\theta > 0$

よって、a の虚数部 $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ は正である。

従って、 $a = \dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

以上より、次が成り立つ。

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

※ 3つの cos の和の値は求まるものの、$\cos\dfrac{2\pi}{7}$ 単独の値を求めることはできない。

注意. 正5角形の場合を振り返ってみる。$\mathbb{F}_5^\times = \{1,2,3,4\}$ は2を生成元とする巡回群となる。$2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=3$ の順に並ぶので、それを $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ の指数として並べ、1つおきにとって和を作れば $a=\zeta+\zeta^4, \quad b=\zeta^2+\zeta^3$ となる。これは、先に扱ったものと同じである。

問題　正11角形に関して

$\mathbb{F}_{11}^\times = \{1,2,3,\cdots,10\}$ については、

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^n \pmod{11}$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

となる。

この順で $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{11}}$ の指数にして並べたものを1つおきにとって和をとる。

すなわち、$a=\zeta+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^9+\zeta^2, \quad b=\zeta^2+\zeta^8+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6$ とする。

このとき、 a,b を解とする2次方程式を作れ。そして、a,b の値を求めよ。さらに何が言えるか？

(iii) **相反方程式による方法**

$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ は方程式 $x^7=1$ の解である。

$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ で、$\zeta\neq 1$ であるから、 ζ は $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解である。

$x\neq 0$ であるから、両辺を x^2 で割って、 $x^3+x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=0$

$X = x+\dfrac{1}{x}$ とおき、

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = X^3-3X,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = X^2-2$$

より、$X^3+X^2-2X-1=0$
これは (3)(i) で導いたものと同じになる。そして、これ以上進めない。

3 正 17 角形の作図について

3.1 ガウスのアイディアによる $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ の計算

正 5 角形、正 7 角形の場合と同様に、$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{17}}=\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$ とおくと、複素数平面において $1,\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\cdots\cdots,\zeta^{16}$ の表す 17 点は正 17 角形の頂点を表す。このうち、1 を除く $\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\cdots\cdots,\zeta^{16}$ を上手に並べて、それを 2 分割、4 分割、8 分割していく。

- 整数を素数 17 で割った余りのうち、0 を除いたものを考える。
天下り的であるが、$3^n \pmod{17}$ を以下の表にまとめる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$3^n \pmod{17}$	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

- この表によると、整数を 17 で割った余りで 0 以外のものはすべて 3^n で表される。さらに、$3^{16}\equiv 1 \pmod{17}$ を満たす。従って、$\{1,2,\cdots,16\}$ は乗法について、3 を生成元とする巡回群となる。それを $\mathbb{F}_{17}^{\times}$ と表す。

- 表を見ると以下のことに気付く。
16 個並ぶものの真ん中の項は $3^8\equiv 16\equiv -1 \pmod{17}$ である。従って、9 番目から 15 番目は、1 番目から 7 番目を -1 倍したものである。従って、17 から引いた数に等しい。そのため、表を作成するには、前半の計算だけで実質終わったようなものである。

- なお、ζ の指数にして得られるものは、互いに逆数となる。
$3^{n+8}=3^8\cdot 3^n\equiv -3^n \pmod{17}$　　$\zeta^{3^{n+8}}=\zeta^{3^{-n}}$
従って、$\zeta^{3^n}+\zeta^{3^{n+8}}=2\cos 3^n\theta$

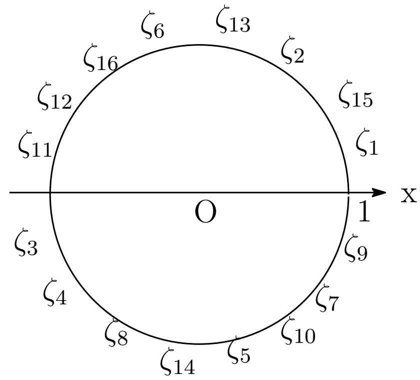
- $3^n \pmod{17}$ の並び順に従って、
$\zeta,\zeta^3,\zeta^9,\zeta^{10},\zeta^{13},\zeta^5,\zeta^{15},\zeta^{11},\zeta^{16},\zeta^{14},\zeta^8,\zeta^7,\zeta^4,\zeta^{12},\zeta^2,\zeta^6$
と並べる。これをガウスのアイディアに従って、2 分割、4 分割、8 分割にしていく。

3.2　２分割

上で並べたものを交互にとって和を作る。すなわち、

$$a_1 = \zeta + \zeta^9 + \zeta^{13} + \zeta^{15} + \zeta^{16} + \zeta^8 + \zeta^4 + \zeta^2$$
$$a_2 = \zeta^3 + \zeta^{10} + \zeta^5 + \zeta^{11} + \zeta^{14} + \zeta^9 + \zeta^{12} + \zeta^6$$

とおく。



ζ^{3^k} を ζ_k と表す。

- $a_1 + a_2 = \zeta + \zeta^2 + \cdots\cdots + \zeta^{16}$
  $= (1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots\cdots + \zeta^{16}) - 1$
  $= 0 - 1 = -1$

- $a_1 \cdot a_2 =$

$$\begin{array}{llllllll}
\zeta^4 & +\zeta^{11} & +\zeta^6 & +\zeta^{12} & +\zeta^{15} & +\zeta^8 & +\zeta^{13} & +\zeta^7 \\
+\zeta^{12} & +\zeta^2 & +\zeta^{14} & +\zeta^3 & +\zeta^6 & +\zeta^{16} & +\zeta^4 & +\zeta^{15} \\
+\zeta^{16} & +\zeta^6 & +\zeta & +\zeta^7 & +\zeta^{10} & +\zeta^3 & +\zeta^8 & +\zeta^2 \\
+\zeta & +\zeta^8 & +\zeta^3 & +\zeta^9 & +\zeta^{12} & +\zeta^5 & +\zeta^{10} & +\zeta^4 \\
+\zeta^2 & +\zeta^9 & +\zeta^4 & +\zeta^{10} & +\zeta^{13} & +\zeta^6 & +\zeta^{11} & +\zeta^5 \\
+\zeta^{11} & +\zeta & +\zeta^{13} & +\zeta^2 & +\zeta^5 & +\zeta^{15} & +\zeta^3 & +\zeta^4 \\
+\zeta^7 & +\zeta^{14} & +\zeta^9 & +\zeta^{15} & +\zeta & +\zeta^{11} & +\zeta^{16} & +\zeta^{10} \\
+\zeta^5 & +\zeta^{12} & +\zeta^7 & +\zeta^{13} & +\zeta^{16} & +\zeta^9 & +\zeta^{14} & +\zeta^8
\end{array}$$

$$= 4(\zeta + \zeta^2 + \cdots\cdots + \zeta^{16}) = -4$$

従って、 a_1, a_2 は、２次方程式 $x^2 + x - 4 = 0$ の２つの解である。

２次方程式を解いて、 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

a_1, a_2 はそれぞれどちらの値になるのか？

$a_1 = (\zeta + \zeta^{16}) + (\zeta^2 + \zeta^{15}) + (\zeta^4 + \zeta^{13}) + (\zeta^8 + \zeta^9)$
$\quad = 2(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta) \qquad \left(\theta = \frac{2\pi}{17}\right)$

ここで、$0 < \theta < 2\theta = \dfrac{4\pi}{17} < \dfrac{\pi}{4}$ であるから、$\cos\theta > \cos 2\theta > \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$4\theta = \dfrac{8\pi}{17} < \dfrac{\pi}{2}$ より、$\cos 4\theta > 0$　また、$0 > \cos 8\theta > -1$

よって、　$a_1 > 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 1\right) = 2(\sqrt{2} - 1) > 0$

$a_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad a_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

注意.

$a_1 \cdot a_2$ の計算では展開して出てきた 64 個の項を整理して $4(\zeta + \zeta^2; \cdots\cdots + \zeta^{16})$ とした。よく見て、それぞれの指数の項が４つずつあることを見つけるだけといえばそれまでである。

ただし、次のような規則性もある。積を上記のように8行8列に展開したときに、行列のように i 行 j 列成分を $\alpha_{i,j}$ で表すことにする。

・対角線上の項の和$=\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2}+\cdots\cdots+\alpha_{8,8}=\zeta^4+\zeta^2+\zeta+\zeta^9+\zeta^{13}+\zeta^{15}+\zeta^{16}+\zeta^8=a_1$

・その右上の和$=\alpha_{1,2}+\alpha_{2,3}+\cdots\cdots+\alpha_{7,8}+\alpha_{8,1}=\zeta^{11}+\zeta^{14}+\zeta^7+\zeta^{12}+\zeta^6+\zeta^3+\zeta^{10}+\zeta^5=a_2$

・その右上の和$=\alpha_{1,3}+\alpha_{243}+\cdots+\alpha_{6,8}+\alpha_{7,1}+\alpha_{8,2}=\zeta^6+\zeta^3+\zeta^{10}+\zeta^5+\zeta^{11}+\zeta^4+\zeta^7+\zeta^{12}=a_2$

以下同様に

・$\zeta^{12}+\zeta^6+\zeta^3+\zeta^{10}+\zeta^5+\zeta^{11}+\zeta^{14}+\zeta^7=a_2$

・$\zeta^{15}+\zeta^{16}+\zeta^8+\zeta^4+\zeta^2+\zeta+\zeta^9+\zeta^{13}=a_1$

・$\zeta^8+\zeta^4+\zeta^2+\zeta+\zeta^9+\zeta^{13}+\zeta^{15}+\zeta^{16}=a_1$

・$\zeta^{13}+\zeta^{15}+\zeta^{16}+\zeta^8+\zeta^4+\zeta^2+\zeta+\zeta^9+=a_1$

・$\zeta^7+\zeta^{12}+\zeta^6+\zeta^3+\zeta^{10}+\zeta^5+\zeta^{11}+\zeta^{14}=a_2$

となる。

従って、 $a_1\cdot a_2=4(a_1+a_2)=-4$

3.3 4分割

前に並べた $\zeta,\zeta^3,\cdots$ を以下のように4分割する。

$b_1=\zeta+\zeta^{13}+\zeta^{16}+\zeta^4$

$b_2=\zeta^3+\zeta^5+\zeta^{14}+\zeta^{12}$

$b_3=\zeta^9+\zeta^{15}+\zeta^8+\zeta^2$

$b_4=\zeta^{10}+\zeta^{11}+\zeta^7+\zeta^6$

(1) b_1 と b_3 について

- $b_1+b_3=a_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$
- $$\begin{aligned} b_1\cdot b_3 &= (\zeta+\zeta^{13}+\zeta^{16}+\zeta^4)(\zeta^9+\zeta^{15}+\zeta^8+\zeta^2) \\ &= (\zeta^{10}+\zeta^{16}+\zeta^9+\zeta^3)+(\zeta^5+\zeta^{11}+\zeta^4+\zeta^{15}) \\ &\quad +(\zeta^8+\zeta^{14}+\zeta^7+\zeta)+(\zeta^{13}+\zeta^2+\zeta^{12}+\zeta^6) \\ &= \zeta+\zeta^2+\cdots\cdots+\zeta^{16}=-1 \end{aligned}$$

従って、b_1,b_3 は2次方程式 $x^2-\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}x-1=0$ の2つの解である。

この2次方程式を解いて、$x=\dfrac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\pm\sqrt{\frac{18-2\sqrt{17}}{4}+4}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{17}\pm\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

$b_1=(\zeta+\zeta^{16})+(\zeta^4+\zeta^{13})=2(\cos\theta+\cos4\theta)=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{17}+\cos\dfrac{8\pi}{17}\right)>0$ であるから、

$$b_1=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4},\qquad b_3=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

(2) b_2 と b_4 について

- $b_2+b_4=a_2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

- $b_2 \cdot b_4 = (\zeta^3+\zeta^5+\zeta^{14}+\zeta^{12})(\zeta^{10}+\zeta^{11}+\zeta^7+\zeta^6)$
$= (\zeta^{13}+\zeta^{14}+\zeta^{10}+\zeta^9)+(\zeta^{15}+\zeta^{16}+\zeta^{12}+\zeta^{11})$
$+(\zeta^7+\zeta^8+\zeta^4+\zeta^3)+(\zeta^5+\zeta^6+\zeta^2+\zeta)$
$= \zeta+\zeta^2+\cdots\cdots+\zeta^{16} = -1$

従って、b_2, b_4 は２次方程式 $x^2 - \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}x - 1 = 0$ の２つの解である。

この２次方程式を解いて、$x = \dfrac{\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\frac{18+2\sqrt{17}}{4}+4}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{17}\pm\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$

$b_2 = (\zeta^3+\zeta^{14})+(\zeta^5+\zeta^{12})$
$= 2(\cos 3\theta + \cos 5\theta) = 4\cos 4\theta \cos\theta = 4\cos\dfrac{8\pi}{17}\cos\dfrac{2\pi}{17} > 0$ であるから、

$$b_2 = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}, \qquad b_3 = \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

3.4 ８分割

$c_1 = \zeta + \zeta^{16}$
$c_2 = \zeta^3 + \zeta^{14}$
$c_3 = \zeta^9 + \zeta^8$
$c_4 = \zeta^{10} + \zeta^7$
$c_5 = \zeta^{13} + \zeta^4$
$c_6 = \zeta^5 + \zeta^{12}$
$c_7 = \zeta^{15} + \zeta^2$
$c_8 = \zeta^{11} + \zeta^6$

とする。

- $c_1 + c_5 = b_1 = \dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$
- $c_1 \cdot c_5 = \zeta^{14}+\zeta^5+\zeta^{12}+\zeta^3 = b_2 = \dfrac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$

従って、c_1, c_5 は、２次方程式

$$x^2 - \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}x + \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} = 0$$

の２つの解となる。
２次方程式を解いて

$$x = \frac{1}{2}\left\{\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} \pm \sqrt{D}\right\}$$

ここで

$$D = \left(\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - \left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left\{(18-2\sqrt{17})+(34-2\sqrt{17})+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right.$$

$$+16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\quad\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{16}\left\{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\quad\right\}$$

従って、

$$x=\frac{1}{8}\left\{\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\pm\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right\}$$

$c_1=\zeta+\zeta^{16}=2cos\dfrac{2\pi}{17}>0$ であるから

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{16}\left\{\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right.$$
$$\left.+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\quad\right\}$$

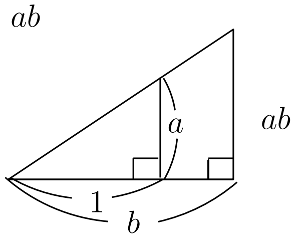
定理　正 17 角形は定規とコンパスで作図することができる。

証明）上記の $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ の値が定規とコンパスで作り出すことができることを示せばよい。それには、長さ 1 が与えられているとき、それをもとに全ての自然数を得ることから始め、全ての有理数が得られること、さらに、既知の 2 つ値からその和、差、積が得られること、さらに、既知の値の平方根が得られることを言えばよい。

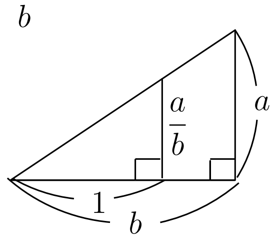
(1) a,b が与えられたとき、 $a+b,\ |a-b|$ を作図することができる。
証明）略

(2) a,b が与えられたとき、 $ab,\ \dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$ を作図することができる。
証明）次の図による。

ab

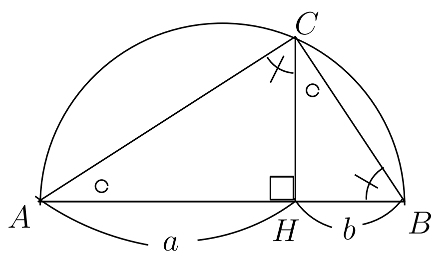


$\dfrac{a}{b}$



(3) a,b が与えられたとき、 $\sqrt{ab}$ を作図することができる。
証明）

$AB = a + b$ となるように2点 A, B をとり、AB を直径とする円を描く。
直径 AB 上に $AH = a$ となる点 H をとる。このとき、 $HB = b$ となる。
また、点 H を通り、直径 AB に垂直な直線と円との交点の1つを C とする。



図からわかるように、 $\triangle AHC$ と $\triangle CHB$ は相似な直角三角形であるから、

$AH : HC = CH : HB$ が成り立つ。

よって、 $CH^2 = AH \cdot HB = ab \qquad CH = \sqrt{ab}//$

以上により定理は証明された。(証明終)

4　積 $a_1 \cdot a_2$ の計算について

正17角形の作図可能性について考える過程で、 $a_1 \cdot a_2 = -4$ となることを示した。それには、ζ の巾乗で表される式の積を展開して出てくる64項を整理して $4(\zeta + \zeta^2 + \cdots\cdots + \zeta^{16}$ になることがわかれば解決する。

ただし、もう少し発展したことに繋げるためには、この並べ方がよい性質を持っていることについて、もう少し考察しておくのがよい。

4.1　対角線方向へ和をとることについて

前節で、対角線方向への和をとると、a_1 もしくは a_2 に等しくなることをコメントした。どうしてそうなるか、確認しておく。$\zeta^{3^k} = \zeta_k$ と表す。

補題1　(1)　$\zeta_{k+l} = (\zeta_k)^{3^l}$　　(2)　$\zeta_{k+16} = \zeta_k$

証明)(1)　$\zeta_{k+l} = \zeta^{3^{k+l}} = \zeta^{3^k \cdot 3^l} = \left(\zeta^{3^k}\right)^{3^l} = (\zeta_k)^{3^l}//$

(2)　$3^{16} \equiv 1 \pmod{17}, \quad \zeta^{17} = 1$ であるから、$\zeta^{3^{16}} = \zeta^{1+17N} = \zeta \cdot (\zeta^{17})^N = \zeta$

従って、$\zeta_{k+16} = \zeta^{3^{k+16}} = \left(\zeta^{3^{16}}\right)^{3^k} = \zeta^{3^k} = \zeta_k \quad //$

ガウスは $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots, \zeta_{15}$ と並べた。前節の2分割のところで用いたものは、

$a_1 = \zeta_0 + \zeta_2 + \cdots\cdots + \zeta_{14}, \quad a_2 = \zeta_1 + \zeta_3 + \cdots\cdots + \zeta_{15}$ と表される。

補題2

$$\zeta_{2k} + \zeta_{2k+2} + \cdots\cdots + \zeta_{2k+14} = a_1$$
$$\zeta_{2k+1} + \zeta_{2k+3} + \cdots\cdots + \zeta_{2k+15} = a_2$$

証明)補題1により、ζ_m の値は、m を16で割った余りで決まる。

$2k, 2k+2, \cdots\cdots, 2k+14$ は連続する 8 個の偶数である。従って、16 で割った余りは、$0, 2, \cdots, 14$ を 1 通り巡ることになる。これにより、1 つ目の等式が示される。

例. $\zeta_{20}+\zeta_{22}+\cdots\cdots+\zeta_{34}=\zeta_4+\zeta_6+\cdots+\zeta_{14}+\zeta_0+\zeta_2=a_1$

2 つ目の等式も同様である。//

補題 3. 積 $a_1 \cdot a_2 = (\zeta_0+\zeta_2+\cdots\cdots+\zeta_{14})\cdot(\zeta_1+\zeta_3+\cdots\cdots+\zeta_{15})$
を（前節でやったように）8 行 8 列に展開する。
その i 行 j 列の項を $c_{i,j}$ で表す。また、$\overline{k+1}$ で $k+1$ を 8 で割った余りを表すとすると、$c_{\overline{i+1},\overline{j+1}} = c_{i,j}^{3^2}$ が成り立つ。
さらに、$c_{i,j}=\zeta_k$ ならば、$c_{\,i+1,j+1}=\zeta_{k+2}$ が成り立つ。

証明）

$$a_1=\sum_{i=1}^{8}\zeta_{2(i-1)}, \qquad a_2=\sum_{j=1}^{8}\zeta_{2(j-1)+1}$$

$c_{i,j}=\zeta_{2(i-1)}\cdot\zeta_{2(j-1)+1}$ である。
$\therefore\quad c_{\overline{i+1},\overline{j+1}}=\zeta_{2i}\cdot\zeta_{2j+1}=\left(\zeta_{2(i-1)}\right)^{3^2}\cdot\left(\zeta_{2(j-1)+1}\right)^{3^2}=\left(\zeta_{2(i-1)}\cdot\zeta_{2(j-1)+1}\right)^{3^2}=c_{i,j}^{3^2}$
さらに、$c_{\overline{i+1},\overline{j+1}}=c_{i,j}^{3^2}=(\zeta_k)^{3^2}=\zeta_{k+2}$//

対角線方向の和を考える。第 1 行第 m 列から右下へ向かって和をとるものについては、第 1 行の項を $c_{1,m}=\zeta_l$ であるとして、補題 3 より

$$\sum_{i=1}^{8}c_{i,\overline{m+i-1}} \quad = \quad \sum_{i=1}^{8}\zeta_{l+2(i-1)}=\zeta_l+\zeta_{l+2}+\cdots\cdots+\zeta_{l+14}$$

となる。補題 2 より、$l=2k$（偶数）ならば、それは a_1 に等しく、$l=2k+1$（奇数）ならば、それは a_2 に等しい。

前節で展開した第 1 行の ζ の指数が 3 の何乗になっているのか考えてみる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$3^n \pmod{17}$	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

を参考にして、以下のようになる。

ζの指数	4	11	6	12	15	8	13	7
3^nとなる n	12	7	15	13	6	10	4	11
対角線方向の和	a_1	a_2	a_2	a_2	a_1	a_1	a_1	a_2

従って、64 項の総和は $4(a_1+a_2)=-4$ となる。

ここで、 a_1 になるところと a_2 になるところが同じだけあることから総和が計算できるのである。他の素数 p についても考えるときに、 a_1 になるところと a_2 になるところが同じだけあることが重要なことであるとわかる。

4.2 ガウスの積公式

ここまでの一連の計算は、ガウスが 19 歳の時に思いついて方法だという。ガウスは、さらに数論の発展した内容に進むため、計算方法について工夫を加えたようである。栗原将人著「ガウスの数論世界をゆく」（数学書房 2017 年）では、ガウスの論文をもとに分かり易く解説してある。ここでは、それをもとに、まず $\mathbb{F}_{17}^{\times}$ に限定して考察してみる。さらに、一般の奇素数 p についても考察してみる。

正 17 角形の作図可能性のところで、 $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ の値を求めるために、2 分割に続いて、4 分割、8 分割を考えた。それは $16 = 17 - 1$ の約数での分割である。

定義　d を $16(={}^{\#}\mathbb{F}_{17}^{\times})$ の約数とする。$\mathbb{F}_{17}^{\times}$ を生成元 3 の巾乗順にならべた $3^0, 3^1, \cdots, 3^{15}$ を d 個に分割し、

$$H_d = \{3^0, 3^d, 3^{2d}, \cdots\cdots 3^{16-d}\}$$

とする。
このとき、

$$3H_d = \{3^1, 3^{d+1}, 3^{2d+1}, \cdots\cdots 3^{17-d}\}$$
$$3^2H_d = \{3^2, 3^{d+2}, 3^{2d+2}, \cdots\cdots 3^{18-d}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$3^{d-1}H_d = \{3^{d-1}, 3^{2d-1}, 3^{3d-1}, \cdots\cdots 3^{15}\}$$

- $d = 2$、すなわち 2 分割のとき

$$H_2 = \{3^0, 3^2, 3^4, \cdots\cdots 3^{14}\} = \{1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2\}$$
$$3H_2 = \{3^1, 3^3, 3^5, \cdots\cdots 3^{15}\} = \{3, 10, 5, 11, 14, 7, 12, 6\}$$

また

$$a_1 = \sum_{\alpha\in H_2}\zeta^{\alpha} \qquad a_2 = \sum_{\alpha\in 3H_2}\zeta^{\alpha}$$

と表すことができる。

- $d = 4$、すなわち 4 分割のとき

$$H_4 = \{3^0, 3^4, 3^8, 3^{12}\} = \{1, 13, 16, 4\}$$
$$3H_2 = \{3^1, 3^5, 3^9, 3^{13}\} = \{3, 5, 14, 12\}$$
$$3^2H_2 = \{3^2, 3^6, 3^{10}, 3^{14}\} = \{9, 15, 8, 2\}$$
$$3^3H_2 = \{3^3, 3^7, 3^{11}, 3^{15}\} = \{10, 11, 7, 6\}$$

また

$$b_1 = \sum_{\alpha\in H_4}\zeta^{\alpha} \qquad b_2 = \sum_{\alpha\in 3H_4}\zeta^{\alpha} \qquad b_3 = \sum_{\alpha\in 3^2H_4}\zeta^{\alpha} \qquad b_4 = \sum_{\alpha\in 3^3H_4}\zeta^{\alpha}$$

と表すことができる。

注意

・8 分割も同様である。16 分割の時は、元 1 つずつに分割したものとなる。

・$d=1$ のときは、$H_1=\{3^0,3^1,\cdots\cdots,3^{15}\}$ とする。

このとき、$\displaystyle\sum_{\alpha\in H_1}\zeta^\alpha=-1$ 　が成り立つ。

計算を簡明に記述するため、栗原先生は次のような記号を使っている。（ガウスは別の記号を使ったが、意味を考えるとこの記号の方がよいとのことである、）

定義　$n\in\mathbb{Z}$ に対して、$\displaystyle[n]_d=\sum_{\alpha\in H_d}\zeta^{n\alpha}$ と定義する。

例.　正 17 角形の作図の可能性を考察する際に 2 分割で考えたものは

$$a_1=\sum_{\alpha\in H_2}\zeta^\alpha=[1]_2\qquad a_2=\sum_{\alpha\in 3H_2}\zeta^\alpha=\sum_{\alpha\in H_2}\zeta^{3\alpha}=[3]_2$$

と表すことができる。同様に、4 分割、8 分割について

$$b_1=[1]_4\qquad b_2=[3]_4\qquad b_3=[3^2]_4\qquad b_4=[3^3]_4$$

$$c_1=[1]_8\qquad c_2=[3]_8\qquad c_3=[3^3]_4\qquad c_4=[3^3]_8$$
$$c_5=[3^4]_8\qquad c_6=[3^5]_8\qquad c_7=[3^6]_8\qquad c_8=[3^7]_8$$

となる。

命題 1　$n\equiv 0\pmod{17}$ のとき、$[n]_d=\dfrac{16}{d}$

証明）

$$[n]_d=\sum_{\alpha\in H_d}\zeta^{n\alpha}=\sum_{\alpha\in H_d}(\zeta^n)^\alpha=\sum_{\alpha\in H_d}1={}^{\#}\,H_d=\frac{16}{d}//$$

命題 2　n を 17 で割った余りを $\overline{n}$ 　$(0\leqq\overline{n}<17)$ で表すものとする。

$\overline{n}\neq 0,\quad \overline{n}\in 3^kH_d$ ならば、

$$[n]_d=[3^k]_d=\sum_{\alpha\in 3^kH_d}\zeta^\alpha$$

が成り立つ。

証明）$\overline{n}\in 3^kH_d$ のとき、 $n=3^{k+ld}+17N\quad(l,N\in\mathbb{Z})$ である。$\zeta^{17}=1$ より、

$$n_d=\sum_{\alpha\in H_d}\zeta^{n\alpha}=\sum_{m=0}^{\frac{16}{d}-1}\zeta^{3^{k+ld}3^{md}}=\sum_{m=0}^{\frac{16}{d}-1}\zeta^{3^{k+(l+m)d}}=\sum_{j=l}^{l+\frac{16}{d}-1}\zeta^{3^{k+jd}}$$

和における ζ の指数の 3 の指数は、

$$3k + ld, 3k + (l+1)d, \cdots\cdots, 3k + 16 + (l-1)d$$

これらを 16 を法とした合同で考え、順序を整えると、

$$3k, 3k + d, \cdots\cdots, 3k + 16 - d$$

と合同になる。従って、

$$n_d = \sum_{j=0}^{\frac{16}{d}-1} \zeta^{3^{k+jd}} = [3^k]_d \quad //$$

定理　（ガウスの積公式）

$$[m]_d \cdot [n]_d = \sum_{\alpha \in H_d} [m + n\alpha]_d = \sum_{\alpha \in H_d} [m\alpha + n]_d$$

証明）以下、α について、17 で割った余りを考えなければいけないところを α のままで記載してあるところがある。いずれ、計算結果は同じなのでそのままとした。α 以外でも余りとすべきところをそのままにしたところがある。

$$[m]_d \cdot [n]_d = \sum_{\alpha \in H_d} \zeta^{m\alpha} \cdot \sum_{\beta \in H_d} \zeta^{n\beta} = \sum_{\alpha \in H_d} \sum_{\beta \in H_d} \zeta^{m\alpha + n\beta}$$

和における ζ の指数は、$m\alpha + n\beta = \alpha(m + n\alpha^{-1}\beta)$
α を固定して、β が H_d 全体を動くことを考える。

- $\alpha^{-1}\beta \in H_d$ であることは、α, β の ζ の指数がいずれも d の倍数であることからわかる。
- $\alpha^{-1}\beta = \alpha^{-1}\beta' \iff \beta = \beta'$

従って、$\beta \longrightarrow \alpha^{-1}\beta$ は H_d からそれ自身への 1 : 1 対応である。そのため、β が H_d 全体を動くとき、$\alpha^{-1}\beta = \gamma$ も H_d 全体を動く。それを踏まえて前の計算の続きを行うと

$$[m]_d \cdot [n]_d = \sum_{\alpha \in H_d} \sum_{\gamma \in H_d} \zeta^{\alpha(m+n\gamma)} = \sum_{\gamma \in H_d} \left(\sum_{\alpha \in H_d} \zeta^{\alpha(m+n\gamma)} \right) = \sum_{\gamma \in H_d} [m + n\gamma]_d$$

よって、第 1 の式が成り立つ。
また、m と n を入れ替えて、 $[m]_d \cdot [n]_d = [n]_d \cdot [m]_d = \sum_{\alpha \in H_d} [m\alpha + n]_d$ (第 2 の式）が成り立つ。(証明終)

4.3 ガウスの積公式による正 17 角形の作図に関わる計算

ガウスの積公式を用いると、正 17 角形の作図可能性に関わる計算を簡明に記述することができる。

(1) 2 分割

$H_2 = \{1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2\}$

- $a_1 + a_2 = [1]_1 = -1$
- $a_1 \cdot a_2 = [1]_2 \cdot [3]_2 = \displaystyle\sum_{\alpha \in H_2} [1 \cdot \alpha + 3]_2$
  $= [1+3]_2 + [9+3]_2 + [13+3]_2 + [15+3]_2 + [16+3]_2 + [8+3]_2 + [4+3]_2 + [2+3]_2$
  $= [4]_2 + [12]_2 + [16]_2 + [1]_2 + [2]_2 + [11]_2 + [7]_2 + [5]_2$
  $= a_1 + a_2 + a_1 + a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_2 = 4(a_1 + a_2) = -4$

従って、2 次方程式 $x^2 + x - 4 = 0$ を解く。

$a_1 > 0$ であることを示して、

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad a_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

(2) 4 分割

$H_4 = \{1, 13, 16, 4\} \quad 3H_2 = \{3, 5, 14, 12\} \quad 3^2 H_2 = \{9, 15, 8, 2\} \quad 3^3 H_2 = \{10, 11, 7, 6\}$

i) b_1 と b_3

- $b_1 + b_3 = a_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$
- $b_1 \cdot b_3 = [1]_4 \cdot [9]_4 = \displaystyle\sum_{\alpha \in H_4} [1 \cdot \alpha + 9]_4 = [1+9]_4 + [13+9]_4 + [16+9]_4 + [4+9]_4$
  $= [10]_4 + [5]_4 + [8]_4 + [13]_4 = b_4 + b_2 + b_3 + b_1 = [1]_1 = -1$

従って、2 次方程式 $x^2 - \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} x - 1 = 0$ を解く。

$b_1 > 0$ であることを示して、

$$b_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, \qquad b_3 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

ii) b_2 と b_4

- $b_2 + b_4 = a_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}$
- $b_2 \cdot b_4 = [3]_4 \cdot [10]_4 = \displaystyle\sum_{\alpha \in H_4} [3 \cdot \alpha + 10]_4$
  $= [3 + 10]_4 + [5 + 10]_4 + [14 + 10]_4 + [12 + 10]_4$
  $= [13]_4 + [15]_4 + [7]_4 + [5]_4 = b_1 + b_3 + b_4 + b_2 = [1]_1 = -1$

従って、２次方程式 $x^2-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}x-1=0$ を解く。

$b_2>0$ であることを示して、

$$b_2=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}, \qquad b_4=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

(3) ８分割

$H_8=\{1,16\}\quad 3H_8=\{3,14\}\quad 3^2H_8=\{9,8\}\quad 3^3H_8=\{10,7\}$

$3^4H_8=\{13,4\}\quad 3^5H_8=\{5,12\}\quad 3^6H_8=\{15,2\}\quad 3^7H_8=\{11,6\}$

- $c_1+c_5=b_1=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$
- $c_1\cdot c_5=\sum_{\alpha\in H_8}[1\cdot\alpha]_8=[1+13]_8+[16+13]_8=[14]_8+[12]_8=c_2+c_6=b_2$

$$=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

従って、c_1,c_5 は、２次方程式

$$x^2-\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}x+\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}=0$$

の２つの解となる。

$c_1=\zeta+\zeta^{16}=2cos\frac{2\pi}{17}>0$ であるから

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{16}\left\{\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right.$$
$$\left.+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right\}$$

5　２分割について　… いくつかの奇素数で計算

17 正角形の作図可能性については、$\zeta=e^{\frac{2\pi}{17}}$ とおき、$1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{16}$ が正１７ 17 の頂点となることを用いた。

その他の奇素数 p についても、$\zeta=e^{\frac{2\pi}{p}}$ とおくと、$1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{p-1}$ が正 p 角形の頂点となる。正 17 角形のときに求めた a_1,a_2 の値をいくつかの奇素数 p の場合にも求めてみる。($p=5,7$ については、既に述べたことと重複する)

5.1 $p=3$ の場合

$1,\zeta,\zeta^2$ が正三角形の頂点。$a_1+a_2=\zeta+\zeta^2=-1,\quad a_1\cdot a_2=\zeta\cdot\zeta^2=\zeta^3=1$

従って、2 次方程式 $x^2+x+1=0$ を満たす。これを解いて $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

a_1 の虚数部は正であるから、$a_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\quad a_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

5.2 $p=5$ の場合

n	0	1	2	3
$2^n \pmod 5$	1	2	4	3

左の表からわかるように、$\mathbb{F}_5^\times=\{1,2,3,4\}$ は 2 で生成される巡回群となる。従って、 $H_2=\{1,4\}\quad 2H_2=\{2,3\}$

$\zeta,\zeta^2,\zeta^4,\zeta^3$ と並べ、$a_1=\zeta+\zeta^4\quad a_2=\zeta^2+\zeta^3$

- $a_1+a_2=[1]_1=-1$
- $a_1\cdot a_2=\displaystyle\sum_{\alpha\in H_2}[1\cdot\alpha+2]_2=[1+2]_2+[4+2]_2=[3]_2+[1]_2=a_2+a_1=-1$

従って、2 次方程式 $x^2+x-1=0$ を満たす。これを解いて $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a_=\zeta+\zeta^4=2\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ より、$a_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\qquad\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

5.3 $p=7$ の場合

n	0	1	2	3	4	5
$3^n \pmod 7$	1	3	2	6	4	5

左の表からわかるように、$\mathbb{F}_7^\times$ は 3 で生成される巡回群となる。

従って、 $H_2=\{1,2,4\}\quad 2H_2=\{3,6,5\}$

- $a_1+a_2=[1]_1=-1$
- $a_1\cdot a_2=\displaystyle\sum_{\alpha\in H_2}[1\cdot\alpha+3]_2=[1+3]_2+[2+3]_2+[4+3]_2=[4]_2+[5]_2+[0]_2$
  $=a_1+a_2+3=-1+3=2$

ただし、$[0]_2=\displaystyle\sum_{\alpha\in H_2}\zeta^0=\sum_{\alpha\in H_2}1=^{\#}H_2=3$ を用いた。

従って、2 次方程式 $x^2+x+2=0$ を満たす。これを解いて $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

5.4 $p = 11$ の場合

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^n \pmod{11}$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

上の表からわかるように、$\mathbb{F}_{11}^{\times}$ は 2 で生成される巡回群となる。

従って、 $H_2 = \{1, 4, 5, 9, 3\} \quad 2H_2 = \{2, 8, 10, 7, 6\}$

- $a_1 + a_2 = [1]_1 = -1$
- $a_1 \cdot a_2 = \sum_{\alpha \in H_2} [1 \cdot \alpha + 2]_2 = [1+2]_2 + [4+2]_2 + [5+2]_2 + [9+2]_2 + [3+2]_2$
  $= [3]_2 + [6]_2 + [7]_2 + [0]_2 + [5]_2 = a_1 + a_2 + a_2 + 5 + a_1 = 2(a_1 + a_2) = -2 + 5 = 3$

  ただし、$[0]_2 = \sum_{\alpha \in H_2} \zeta^0 = \sum_{\alpha \in H_2} 1 =^{\#} H_2 = 5$ を用いた。

従って、2 次方程式 $x^2 + x + 3 = 0$ を満たす。これを解いて $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

5.5 $p = 13$ の場合

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$2^n \pmod{13}$	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7

上の表からわかるように、$\mathbb{F}_{13}^{\times}$ は 2 で生成される巡回群となる。

従って、 $H_2 = \{1, 4, 3, 12, 9, 10\} \quad 2H_2 = \{2, 8, 6, 11, 5, 7\}$

- $a_1 + a_2 = [1]_1 = -1$
- $a_1 \cdot a_2 = \sum_{\alpha \in H_2} [1 \cdot \alpha + 2]_2$
  $= [1+2]_2 + [4+2]_2 + [3+2]_2 + [12+2]_2 + [9+2]_2 + [10+2]_2$
  $= [3]_2 + [6]_2 + [5]_2 + [1]_2 + [11]_2 + [12]_2 = a_1 + a_2 + a_2 + a_1 + a_2 + a_1$
  $= 3(a_1 + a_2) = -3$

従って、2 次方程式 $x^2 + x - 3 = 0$ を満たす。これを解いて $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

5.6 $p = 19, 23$ の場合

$p = 19, 23$ について、ここまでの奇素数と同様に、以下のように求めていく。

- $2^n \pmod{p}, \quad 3^n \pmod{p}$ を順に調べて、 $\mathbb{F}_p^{\times} = \{1, 2, \cdots, p-1\}$ の乗法群としての生成元 g を見つける。
- $H_2 = \{g^0, g^2, \cdots\cdots, g^{p-3}\} \qquad gH_2 = \{g^1, g^3, \cdots\cdots, g^{p-2}\}$ とおく。

- $a_1 = \sum_{\alpha \in H_2} \zeta^\alpha = [1]_2 \qquad a_1 = \sum_{\alpha \in gH_2} \zeta^\alpha = [g]_2$

- $a_1 + a_2 = [1]_2 = -1$

- ガウスの積公式により、$a_1 \cdot a_2 = [1]_2 \cdot [g]_2 = \sum_{\alpha \in H_2} [\alpha + g]_2$ とし、以降具体的に計算する。

結果として a_1 と a_2 を解とする２次方程式とその解は

- p = 19 のとき　$x^2 + x + 5 = 0 \qquad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$

- p = 23 のとき　$x^2 + x + 6 = 0 \qquad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{23}i}{2}$

実際の計算はここでは省略する。やってみると時間と手間がかかるだろうが、いい練習問題となることと思う。そして、一般の奇素数 p について成り立つことが予想されるものと思う。それは、「２次ガウス周期の基本定理」と呼ばれるものである。それについては、別のノートに書くことにする。

参考文献

[1]. 「ガウスの数論世界をゆく」　-正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ-
栗原将人　著　　数学書房

[2]. 「ガロアの理論」
ポストニコフ　著　　東京図書

[3]. 「数学のメモ」　第３章　正多角形の作図について … ガウスの f 項周期
片山喜美　２００１年
http://ja9nfo.web.fc2.com/math/math.htm に掲載