問題 (平成 30 年 5 月 1 日　片山出題)

ガウス整数 $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Z},\ i$ は虚数単位 $\}$ において、
$\alpha = 11 + 12i,\ \beta = -7 + 11i$ の最大公約数 $\delta \in \mathbb{Z}[i]$ を求めよ。
($\alpha = \alpha_1\delta,\ \beta = \beta_1\delta, \quad (\alpha_1,\ \beta_1,\ \delta \in \mathbb{Z}[i])$ を満たす $\delta = x + iy$ のうち、
$|\delta| = \sqrt{x^2 + y^2}$ が最も大きなものを求めよ。)

解答例)
ガウス整数でもユークリッドの互除法が使える（詳細は別のプリント）ので、それを用いた解法を述べる。

$\gamma_0 = \alpha,\ \gamma_1 = \beta$ とし、

$\gamma_{k-1} = \mu_k \cdot \gamma_k + \gamma_{k+1} \quad (\mu_k,\ \gamma_{k+1} \in \mathbb{Z}[i], \quad 0 \leqq |\gamma_{k+1}| < |\gamma_k|)$

によって、順次 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$ を定めていく。

ここで、$\{|\gamma_n|^2\}$ は 0 以上の整数の列で、必ず減少するので、いつか 0 に達する。すなわち、$\gamma_{N+1} = 0$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき、その 1 つ前の γ_N が最大公約数になるのである。（自然数のときと同じである）

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \frac{11 + 12i}{-7 + 11i} = \frac{(11 + 12i)(-7 - 11i)}{49 + 121} = \frac{(-77 + 132) + (-121 - 84)i}{170}$$

$$= \frac{11 - 41i}{34}。 \quad \text{これに最も近い } \mathbb{Z}[i] \text{ の元は、} -i \text{ であるから } \mu_1 = -i$$

$$\gamma_2 = \gamma_0 - \mu_1 \cdot \gamma_1 = (11 + 12i) - (-i)(-7 + 11i) = 5i$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{-7 + 11i}{5i} = \frac{11 + 7i}{5}。 \quad \text{これに最も近い } \mathbb{Z}[i] \text{ の元を考え、} \mu_2 = 2 + i$$

$$\gamma_3 = \gamma_1 - \mu_2 \cdot \gamma_2 = (-7 + 11i) - (2 + i)(5i) = -2 + i$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{5i}{-2 + i} = \frac{5i(-2 - i)}{5} = 1 - 2i。 \quad \text{よって、} \mu_3 = 1 - 2i,\ \gamma_4 = 0。$$

以上でユークリッドの互除法が終了して、最大公約数は $\gamma_3 = -2 + i$。　ただし、$\mathbb{Z}[i]$ における 1 の約数 $\pm 1, \pm i$（これらの数を単数という） をかけたものも最大公約数であるから、　**答　$\pm(-2 + i), \pm(1 + 2i)$**

別解

$|\alpha|^2 = 49 + 121 = 170 = 2 \cdot 5 \cdot 17,\ |\beta|^2 = 121 + 144 = 265 = 5 \cdot 53$ で、 $|\delta|^2$ は、これらの公約数である。従って、$|\delta|^2 = 5$ か 1 。

$|\delta|^2 = 5$ となるのは、$\pm(1 + 2i), \pm(1 - 2i), \pm(2 + i), \pm(2 - i)$

$-7 + 11i,\ 11 + 12i$ を割ってみて、商が $\mathbb{Z}[i]$ に入るものが答えになる。

（なお、上の 8 つの候補は、 $1 + 2i$ に $\pm 1, \pm i$ をかけたものと、$1 - 2i$ に $\pm 1, \pm i$ をかけたものであるから、 この 2 つの数で割って確かめればよい。

計算は省略するが、 $\pm(1 + 2i), \pm(-2 + i)$ が最大公約数となる。

1 次不定方程式による最大公約数の表現

自然数 a, b の最大公約数 d をユークリッドの互除法を用いて求めると、$ax + by = d$ を満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ も求めることが出来る。2016 年センター試験で出題された $92x + 197y = 1$ を満たす整数 x, y を求めることについては、

$$\begin{array}{rrr} & 92 & 197 \\ 2) & & 184 \\ \hline & 92 & 13 \\ & 91 & \quad (7 \\ \hline & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 15 & -7 \\ \hline -14 & \\ 1 & -7 \end{array}$$

従って、
$92 \cdot 15 + 197 \cdot (-7) = 1$

左の列がユークリッドの互除法で、それが終わったら右の列の下から上に進んで $x = 15, y = -7$ を導く。

ガウス整数でも同様の計算ができる。
$\alpha, \beta\mathbb{Z}[i]$ の最大公約数の一つ δ を求め、さらに、 $\alpha\mu + \beta\nu = \delta$ を満たす $\mu, \nu \in \mathbb{Z}[i]$ を求めることが出来る。$\alpha = -7 + 11i$, $\beta = 11 + 12i$ については、以下のとおり。

$$\begin{array}{rrr} & -7 + 11i & 11 + 12i \\ -i) & & 11 + 7i \\ \hline & -7 + 11i & 5i \\ & -5 + 10i & \quad (2 + i \\ \hline & -2 + i & 5i \\ -1 - 2i) & & 5i \\ \hline & -2 + i & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 2 - 2i & -2 - i \\ \hline -1 + 2i & \\ 1 & -1 - 2i \\ \hline & 1 + 2i \\ 1 & 0 \end{array}$$

従って、最大公約数は、 $\delta = -2 + i$ およびそれに単数 $\pm 1, \pm i$ をかけたもの (δ の同伴という) であり、$(-7 + 11i) \cdot (2 - 2i) + (11 + 12i) \cdot (-2 - i) = -2 + i$

$(-7 + 11i)x + (11 + 12i)y = -2 + i$ を満たす一般解 $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ を求める。
差し引いて、$(-7 + 11i)\{x - (2 - 2i)\} + (11 + 12i)\{y - (-2 - i)\} = 0$

$$\frac{-7 + 11i}{-2 + i} = \frac{(-7 + 11i)(-2 - i)}{4 + 1} = \frac{25 - 15i}{5} = 5 - 3i$$

$$\frac{11 + 12i}{-2 + i} = \frac{(11 + 12i)(-2 - i)}{4 + 1} = \frac{-10 - 35i}{5} = -2 - 7i$$

より、$(5 - 3i)\{x - (2 - 2i)\} + (-2 - 7i)\{y - (-2 - i)\} = 0$
$5 - 3i$, $-(2 + i)$ の最大公約数は単数 ± 1, $\pm i$ であるから、
$(5 - 3i)\{x - (2 - 2i)\} = (2 + 7i)\{y - (-2 - i)\} = z(5 - 3i)(2 + 7i) \quad (z \in \mathbb{Z}[i])$
$\underline{x = (2 - 2i) + z(2 + 7i),\ y = -(2 + i) + z(5 - 3i) \quad (z \in \mathbb{Z}[i])}$

注意; 最大公約数 $\epsilon(-2 + i) \quad (\epsilon = \pm 1, \pm i)$ を表す一般解は、
$\underline{x = \epsilon(2 - 2i) + z(2 + 7i),\ y = -\epsilon(2 + i) + z(5 - 3i) \quad (z \in \mathbb{Z}[i])}$

追加 「$7+11i$ と $11+12i$ の $\mathbb{Z}[i]$ における最大公約数」

$\gamma_0 = 11+12i$, $\gamma_1 = 7+11i$ とおく。

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \frac{11+12i}{7+11i} = \frac{(11+12i)(7-11i)}{49+121} = \frac{(77+132)+(-121+84)i}{170}$$

$$= \frac{209-37i}{170}$$ これに最も近いガウス整数を考えて $\mu_1 = 1$

$\gamma_2 = \gamma_0 - \mu_1\gamma_1 = (11+12i) - 1\cdot(7+11i) = 4+i$

$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{7+11i}{4+i} = \frac{(7+11i)(4-i)}{16+1} = \frac{39+37i}{17}$ これより、 $\mu_2 = 2+2i$

$\gamma_3 = \gamma_1 - \mu_2\gamma_2 = (7+11i) - (2+2i)(4+i) = (7+11i) - (6+10i) = 1+i$

$\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{4+i}{1+i} = \frac{(4+i)(1-i)}{1+1} = \frac{5-3i}{2}$ これより、 $\mu_3 = 2-i$ としてよい。

$\gamma_4 = \gamma_2 - \mu_3\gamma_3 = (4+i) - (2-i)(1+i) = (4+i) - (3+i) = 1$

従って、最大公約数は $\pm 1, \pm i$ （単数）

	$7+11i$	$11+12i$	
$1)$		$7+11i$	
	$7+11i$	$4+i$	
	$6+10i$		$(2+2i$
	$1+i$	$4+i$	
$2-i)$		$3+i$	
		1	

$-9-i$	$7+2i$
$7+2i$	
$-2+i$	$7+2i$
	$-6-2i$
$-2+i$	1

従って、 $(11+12i)(7+2i) - (7+11i)(9+i) = 1$

$(11+12i)x + (7+11i)y = 1$ の一般解 $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ は、
$(11+12i)\{x-(7+2i)\} + (7+11i)\{y+(9+i)\} = 0$
$(11+12i)\{x-(7+2i)\} = -(7+11i)\{y+(9+i)\}$ で、 $7+11i$ と $11+12i$ の最大公約数が 1 であることから、上式の値は $\mu(11+12i)(7+11i)$ $(\mu \in \mathbb{Z}[i])$ となる。

よって、$\underline{x = (7+2i) + \mu(7+11i),\ y = -(9+i) - \mu(11+12i) \quad (\mu \in \mathbb{Z}[i])}$

さらに、$(11+12i)x + (7+11i)y = \epsilon$ $(\epsilon = \pm 1, \pm i)$ の一般解 $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ は、
$\underline{x = \epsilon(7+2i) + \mu(7+11i),\ y = -\epsilon(9+i) - \mu(11+12i) \quad (\mu \in \mathbb{Z}[i])}$